

Interpolants d'Hermite C^2 obtenus par subdivision

Jean-Louis Merrien,¹

Résumé : Nous proposons un schéma de subdivision dépendant de paramètres pour construire des courbes satisfaisant à des conditions d'Hermite aux extrémités d'un intervalle $[a, b]$. Trois fonctions, f, p et s sont définies sur les nombres dyadiques : $a + (b - a)\frac{i}{2^n}$. Puis, à l'aide de produits infinis de matrices et sous des conditions sur les paramètres, nous montrons que ces fonctions peuvent être prolongées par continuité à l'intervalle $[a, b]$ avec de plus, $f' = p$ et $f'' = s$.

Abstract: We propose a two point subdivision scheme with parameters to draw curves that satisfy Hermite conditions at both ends of $[a, b]$. We build three functions f, p and s on dyadic numbers and, using infinite products of matrices, we prove that, under assumptions on the parameters, these functions can be extended by continuity on $[a, b]$, with $f' = p$ and $f'' = s$.

AMS subject classification: 41A05, 63D05

1. Introduction

Les techniques de subdivision sont des outils efficaces pour construire des courbes et des surfaces par ordinateur. La plupart des méthodes importantes de tracé de courbes peuvent être considérées comme des processus de subdivision (voir Boehm et al. [2]). Elles sont généralement basées sur des découpages des coins des polygones ou polyèdres de contrôle et ne sont pas interpolantes...

Dans cet article, nous étudions le problème d'interpolation d'Hermite suivant : construire une fonction $f \in C^2[a, b]$ interpolant les 6 données suivantes aux extrémités de l'intervalle :

$$f(a) = y_a, f'(a) = y'_a, f''(a) = y''_a, f(b) = y_b, f'(b) = y'_b, f''(b) = y''_b.$$

¹J.-L. Merrien, INSA de Rennes, 20 av. des Buttes de Coesmes, 35043 RENNES CEDEX, France, *email: Jean-Louis.Merrien@insa-rennes.fr*

Une solution bien connue est fournie par le polynôme d'interpolation d'Hermite de degré 5. Mais l'objet de cet article est de construire une famille de fonctions interpolantes dépendant de paramètres à laquelle appartiennent, entre autres, le polynôme d'Hermite et quelques fonctions polynômiales par morceaux. La technique utilisée est celle de la subdivision dyadique, dite de base 2.

Pour des données de Lagrange, elle a été introduite par Deslauriers et Dubuc [4,5] puis peu après par Dyn et al. [6]. Micchelli [10] donne une condition nécessaire et suffisante de convergence de ces schémas. Pour des données d'Hermite formées des fonctions et des dérivées premières aux bords, elles ont été proposées par Merrien [9]. De nouvelles conditions de convergence sont proposées par Dyn et Levin [7], mais elles sont difficilement généralisables au cas C^2 .

Dans la partie 2, on définit l'algorithme, dit HC^2 , sur $[a, b] = [0, 1]$, dépendant de 8 paramètres, permettant la construction de 3 fonctions f, p et s sur l'ensemble dyadique $D = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$ où $D_n = \{\frac{i}{2^n}, i = 0 \dots 2^n\}$, dense dans $[0, 1]$. Puis on donne des conditions nécessaires sur les paramètres pour que l'interpolant f , obtenu par prolongement par continuité soit de classe C^2 et vérifie $f' = p$ et $f'' = s$.

Dans la partie 3, on démontre 2 lemmes donnant des conditions suffisantes pour le prolongement par continuité d'une fonction définie sur D à l'intervalle $[0, 1]$ en une fonction continue ou continûment dérivable. Cette partie fait apparaître des quantités étudiées dans la partie 4 consacrée aux conditions nécessaires et/ou suffisantes de convergence de l'algorithme HC^2 en fonction des paramètres. Les démonstrations sont basées sur la convergence de produits infinis de matrices utilisant les résultats de Daubechies et Lagarias [3].

Enfin, dans la partie 5, on donne plusieurs exemples illustrant les résultats précédents et une étude du domaine de convergence.

2. Description de l'algorithme HC^2

Sur l'intervalle $[a, b]$, on se fixe les 6 données aux extrémités, $y_a, y'_a, y''_a, y_b, y'_b, y''_b$. Si on interpole ces données par le polynôme d'Hermite de degré 5, noté q , on trouve pour les valeurs au milieu $m = \frac{a+b}{2}$ de l'intervalle :

$$\begin{aligned}
q(m) &= \frac{1}{2}(q(b) + q(a)) - \frac{5}{32}h(q'(b) - q'(a)) + \frac{1}{64}h^2(q''(b) + q''(a)) \\
q'(m) &= \frac{15}{8h}(q(b) - q(a)) - \frac{7}{16}(q'(b) + q'(a)) + \frac{1}{32}h(q''(b) - q''(a)) \\
q''(m) &= \frac{3}{2h}(q'(b) - q'(a)) - \frac{1}{4}(q''(b) + q''(a)) \text{ où } h = b - a.
\end{aligned}$$

En réinterpolant ces nouvelles données sur $[a, m]$ et $[m, b]$ par le polynôme d'Hermite, on retrouvera des formules analogues. Par unicité de ce polynôme, on peut ainsi construire le polynôme q sur $D = \cup D_n$ défini précédemment. Le processus est convergent au sens que les fonctions construites sur D sont prolongeables sur $[a, b]$ en q, q' et q'' respectivement.

Pour des simplifications d'écriture, nous supposons désormais que $[a, b] = [0, 1]$. Nous allons étudier les fonctions f, p et s définies sur D par l'algorithme HC^2 suivant, dépendant de 8 paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_2$ et γ_3 :

algorithme HC^2

étape 0 : sur D_0 ,

$$\begin{aligned}
f(0) &= y_0, f(1) = y_1, \\
p(0) &= y'_0, p(1) = y'_1, \\
s(0) &= y''_0, s(1) = y''_1.
\end{aligned}$$

étape $n+1$: connaissant f, p et s sur D_n , on définit ces 3 fonctions sur $D_{n+1} \setminus D_n$ par :

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{2i+1}{2^{n+1}}\right) &= \alpha_1\left(f\left(\frac{i+1}{2^n}\right) + f\left(\frac{i}{2^n}\right)\right) + \alpha_2 h_n \left(p\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - p\left(\frac{i}{2^n}\right)\right) + \alpha_3 h_n^2 \left(s\left(\frac{i+1}{2^n}\right) + s\left(\frac{i}{2^n}\right)\right) \\
p\left(\frac{2i+1}{2^{n+1}}\right) &= \frac{\beta_1}{h_n} \left(f\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - f\left(\frac{i}{2^n}\right)\right) + \beta_2 \left(p\left(\frac{i+1}{2^n}\right) + p\left(\frac{i}{2^n}\right)\right) + \beta_3 h_n \left(s\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - s\left(\frac{i}{2^n}\right)\right) \\
s\left(\frac{2i+1}{2^{n+1}}\right) &= \frac{\gamma_2}{h} \left(p\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - p\left(\frac{i}{2^n}\right)\right) + \gamma_3 \left(s\left(\frac{i+1}{2^n}\right) + s\left(\frac{i}{2^n}\right)\right)
\end{aligned}$$

pour $i = 1 \dots 2^n - 1$, où $h_n = 1/2^n$.

fin de l'algorithme

Definition 1 *L'algorithme HC^2 est convergent si les fonctions f, p, s définies sur D sont prolongeables par continuité sur $[0, 1]$ avec de plus $f' = p, f'' = s$.*

Outre les paramètres correspondant au polynôme de Hermite, nous pouvons assurer la convergence dans certains cas.

Proposition 2 1. *Si $\alpha_1 = 1/2, \alpha_2 = -23/144, \alpha_3 = 5/288, \beta_1 = 9/4, \beta_2 = -5/8, \beta_3 = 1/16, \gamma_2 = 3/2$ et $\gamma_3 = -1/4$ alors l'algorithme HC^2 converge vers l'interpolant C^2 polynômial de degré 3 sur les intervalles $[0, 1/3], [1/3, 2/3]$ et $[2/3, 1]$, (spline cubique avec 2 noeuds intérieurs).*

2. *Si $\alpha_1 = 1/2, \alpha_2 = -5/32, \alpha_3 = 1/64, \beta_1 = 2, \beta_2 = -1/2, \beta_3 = 1/24, \gamma_2 = 3/2$ et $\gamma_3 = -1/4$, l'algorithme HC^2 converge vers l'interpolant C^3 polynômial de degré 4 sur $[0, 1/2]$ et $[1/2, 1]$, (spline quartique avec un noeud intérieur).*

Démonstration : Il suffit pour ces 2 interpolants de calculer les valeurs aux milieux des segments. En réitérant, on obtient des formules analogues ; puisqu'il y a unicité de l'interpolant vérifiant les conditions imposées, on obtient la convergence comme pour le polynôme d'Hermite. \diamond

Donnons maintenant une condition nécessaire plus générale sur la convergence qui permettra de réduire le nombre de paramètres.

Proposition 3 *Si pour toutes les données initiales, l'algorithme HC^2 est convergent alors : $\alpha_1 = 1/2, 8\alpha_2 + 16\alpha_3 = -1, \beta_1 + 2\beta_2 = 1, \gamma_2 + 2\gamma_3 = 1$.*

Démonstration : Elle est basée sur le développement de Taylor des fonctions au voisinage de 0, sachant que $h_n = 1/2^n$ tend vers 0.

Ainsi pour la fonction f , nous avons :

$$f(h_n/2) = \alpha_1(f(h_n) + f(0)) + \alpha_2 h_n (f'(h_n) - f'(0)) + \alpha_3 h_n^2 (f''(h_n) + f''(0))$$

d'où :

$$\begin{aligned} f(0) + (1/2)h_n f'(0) + (1/2)\left(\frac{h_n}{2}\right)^2 f''(0) &= \alpha_1(2f(0) + h_n f'(0) + (1/2)h_n^2 f''(0)) \\ &+ \alpha_2 h_n (h_n f''(0)) + \alpha_3 h_n^2 2f''(0) + o(h_n^2), \end{aligned}$$

soit $\alpha_1 = 1/2$ et $-1/8 = \alpha_2 + 2\alpha_3$ lorsque n tend vers $+\infty$.
 Les autres égalités s'obtiennent de manière similaire. \diamond

Nous nous placerons désormais dans ce cas, par conséquent dans la suite de l'article, l'algorithme HC^2 ne dépend plus que des paramètres $\alpha_2, \beta_1, \beta_3$ et γ_2 .

Remarques :

1. Les paramètres correspondant aux trois cas particuliers étudiés précédemment vérifient naturellement les conditions de la proposition 3.
2. Il était inutile d'introduire un paramètre supplémentaire γ_1 dans l'expression de s ; le développement de Taylor impose $\gamma_1 = 0$.
3. En poursuivant le développement, on obtient les conditions supplémentaires suivantes :
 - si f est de classe C^3 , alors, $3 = 4\beta_1 + 12\beta_2 + 24\beta_3$;
 - si f est de classe C^4 , alors, $\alpha_2 = 1/64, \alpha_3 = -5/32,$
 $3 = 4\beta_1 + 12\beta_2 + 24\beta_3, \gamma_1 = 3/2$ et $\gamma_2 = -1/4$;
 - si f est de classe C^5 , alors $\alpha_2 = 1/64, \alpha_3 = -5/32, \beta_1 = 15/8,$
 $\beta_2 = -7/16, \beta_3 = 1/32, \gamma_1 = 3/2$ et $\gamma_2 = -1/4$, qui correspond au polynôme d'Hermite.
4. La réciproque de la proposition 3 est fausse. Si $\beta_1 = \beta_3 = 0, \beta_2 = 1/2, \gamma_2 = 0$ et $\gamma_3 = 1/2$, alors p et s sont affines et interpolent y'_a, y'_b , respectivement y''_a, y''_b ; on a $p' \neq s$ dès que $y''_a \neq y''_b$.
5. Lorsque les paramètres vérifient les conditions imposées par la proposition 3, si l'on part de données interpolables par un polynôme de degré 2, l'algorithme HC^2 converge vers ce polynôme.

3. Conditions de prolongements

Une condition suffisante pour prolonger à $[0, 1]$ une fonction ϕ définie sur $D = \cup D_n$ est la continuité uniforme sur D . C'est cette condition que nous utiliserons pour prolonger s . Une fois montrée la continuité de s , nous

montrons que $p' = s$, puis de même, nous pourrons prolonger f et montrer $f' = p$. Nous avons besoin de deux lemmes inspirés des travaux de Faber [8].

Lemme 4 *Soit ϕ une fonction définie sur D vérifiant :*

$$\exists \kappa \in [0, 1[, \exists c_1 \in \mathbb{R}_+^* : \left| \phi\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - \phi\left(\frac{i}{2^n}\right) \right| \leq c_1 \kappa^n, 0 \leq i \leq 2^n - 1$$

alors ϕ est prolongeable par continuité sur $[0, 1]$, et

$$\exists c_2 \in \mathbb{R}_+^* : \forall (x, y) \in [0, 1]^2, |x - y| \leq \frac{1}{2^n} \Rightarrow |\phi(x) - \phi(y)| \leq c_2 \kappa^n.$$

Démonstration : Nous démontrons d'abord la majoration pour x, y dans D , puis après avoir prolongé ϕ , nous l'étendons à tout l'intervalle.

Soient x et y deux éléments de D vérifiant $|x - y| \leq 1/2^n$. Alors il existe z élément de D_n vérifiant : $|x - z| \leq 1/2^n$ et $|y - z| \leq 1/2^n$.

Nous allons montrer que $|\phi(x) - \phi(z)| \leq c\kappa^n$. Une inégalité semblable avec y assurera le résultat.

Si x est dans D_n , le résultat est vrai avec $c = c_1$.

Sinon, soit r un entier strictement positif tel que $x \in D_{n+r}$. Si nous supposons $z < x$, nous pouvons écrire que $x = z + \sum_{i=1}^r \frac{\lambda_i}{2^{i+n}}$ avec $\lambda_i = 0$ ou 1 .

Posons alors $p_0 = z$ et $p_j = z + \sum_{i=1}^j \frac{\lambda_i}{2^{i+n}}$, pour j variant de 1 à r . Nous avons $p_j = p_{j-1}$, dans le cas où $\lambda_j = 0$ ou encore $p_j = p_{j-1} + 1/2^{n+j}$, d'où $|\phi(p_j) - \phi(p_{j-1})| \leq c_1 \kappa^{n+j}$. Maintenant, nous pouvons obtenir la majoration :

$$\begin{aligned} |\phi(x) - \phi(z)| &= \left| \sum_{i=1}^r \phi(p_i) - \phi(p_{i-1}) \right| \leq \sum_{i=1}^r |\phi(p_i) - \phi(p_{i-1})| \\ &\leq c_1 \sum_{i=1}^r \kappa^{n+i} \leq c_1 \kappa^n \frac{\kappa}{1 - \kappa} = c\kappa^n. \end{aligned}$$

où $c = c_1 \frac{\kappa}{1 - \kappa}$. Le même raisonnement peut être fait si $z > x$. On obtient évidemment la même majoration pour $|\phi(y) - \phi(z)|$, ce qui permet d'obtenir :

$$\exists c_2 \in \mathbb{R}_+^* : \forall (x, y) \in D^2, |x - y| \leq \frac{1}{2^n} \Rightarrow |\phi(x) - \phi(y)| \leq c_2 \kappa^n.$$

De cette majoration, on déduit que ϕ est uniformément continue sur D , donc prolongeable par continuité sur $[0, 1]$. Pour étendre la majoration précédente à $[0, 1]$, il suffit de reprendre le raisonnement en écrivant que $x = z + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{2^{i+n}}$ avec $\lambda_i = 0$ ou 1 puisque x est limite d'une suite de points de D .

Remarquons qu'en fait ϕ est höldérienne :

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2 : |\phi(x) - \phi(y)| \leq c_2 |x - y|^{-\frac{\ln 2}{\ln 3}}.$$

◇

Notons que l'hypothèse $|\phi(\frac{i+1}{2^n}) - \phi(\frac{i}{2^n})| \leq \varepsilon(n)$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0$, n'est pas suffisante pour conclure à la possibilité de prolongement. On peut trouver des fonctions ϕ non bornées vérifiant cette propriété.

Lemme 5 *Soient ϕ une fonction définie sur D et ψ une fonction continue sur $[0, 1]$ vérifiant :*

$$|2^n(\phi(\frac{i+1}{2^n}) - \phi(\frac{i}{2^n})) - (\psi(\frac{i+1}{2^n}) + \psi(\frac{i}{2^n}))/2| \leq \varepsilon(n), 0 \leq i \leq 2^n - 1$$

avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0$, alors ϕ est prolongeable par continuité sur $[0, 1]$ en une fonction de classe C^1 vérifiant $\phi' = \psi$.

Démonstration : Avec la majoration de l'hypothèse, on obtient que :

$$|\phi(\frac{i+1}{2^n}) - \phi(\frac{i}{2^n})| \leq \frac{\varepsilon(n)}{2^n} + \frac{\max |\psi(x)|}{2^n} \leq c_3 \frac{1}{2^n},$$

donc, par le lemme précédent, ϕ est prolongeable par continuité sur $[0, 1]$.

La fonction χ définie par $\chi(x) = \phi(0) + \int_0^x \psi(t)dt$ est de classe C^1 et vérifie $\chi' = \psi$. Montrons que χ et ϕ coïncident sur D .

Soit $x \in D$ et soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Si $x \in D_n$ alors $x \in D_{n+p}$, pour tout $p \geq 0$, donc nous pouvons choisir n aussi grand que nous le voulons. Comme ψ est uniformément continue sur $[0, 1]$, nous pouvons supposer que n est assez grand pour que :

$$\forall t \in [\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}], |\psi(t) - (\psi(\frac{i+1}{2^n}) + \psi(\frac{i}{2^n}))/2| \leq \varepsilon/2.$$

De même, nous pouvons supposer n assez grand pour que $\varepsilon(n) \leq \varepsilon/2$. Alors, en posant $x = j/2^n, 0 \leq j \leq 2^n$,

$$\begin{aligned}
\chi(x) - \phi(x) &= \phi(0) + \int_0^x \psi(t)dt - \phi(x) \\
&= \sum_{i=0}^{j-1} \left\{ \int_{i/2^n}^{(i+1)/2^n} \psi(t)dt - \left(\phi\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - \phi\left(\frac{i}{2^n}\right) \right) \right\} \\
&= \sum_{i=0}^{j-1} \int_{i/2^n}^{(i+1)/2^n} \left(\psi(t) - \left(\psi\left(\frac{i+1}{2^n}\right) + \psi\left(\frac{i}{2^n}\right) \right) / 2 \right) dt \\
&\quad + \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{j-1} \left\{ \left(\psi\left(\frac{i+1}{2^n}\right) + \psi\left(\frac{i}{2^n}\right) \right) / 2 - 2^n \left(\phi\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - \phi\left(\frac{i}{2^n}\right) \right) \right\},
\end{aligned}$$

d'où $|\chi(x) - \phi(x)| \leq \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{2^n} \varepsilon/2 + \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{j-1} \varepsilon/2 \leq \varepsilon$.

ε étant choisi arbitrairement, on obtient $\chi = \phi$ sur D . Par continuité des deux fonctions, $\chi = \phi$ sur $[0, 1]$ et $\chi' = \phi' = \psi$. \diamond

4. Représentation matricielle et convergence

Pour f, p, s définies sur D , nous notons U_n^i le vecteur de \mathbb{R}^3 :

$$U_n^i = \begin{pmatrix} s\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - s\left(\frac{i}{2^n}\right) \\ \frac{p\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - p\left(\frac{i}{2^n}\right) - h_n \frac{s\left(\frac{i+1}{2^n}\right) + s\left(\frac{i}{2^n}\right)}{2}}{h_n} \\ \frac{f\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - f\left(\frac{i}{2^n}\right) - h_n \frac{p\left(\frac{i+1}{2^n}\right) + p\left(\frac{i}{2^n}\right)}{2} + h_n^2 \frac{s\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - s\left(\frac{i}{2^n}\right)}{12}}{h_n^2} \end{pmatrix}$$

Compte tenu des lemmes 4 et 5 précédents, les 2 premières composantes apparaissent naturellement. Pour la troisième, le facteur $h_n^2 (s(\frac{i+1}{2^n}) - s(\frac{i}{2^n})) / 12$ peut être omis, en changeant de base, mais il permet une écriture intéressante des matrices introduites ci-dessous.

Proposition 6 *Il existe 2 matrices A_1 et A_{-1} de $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ ne dépendant que des paramètres de l'algorithme HC² telles que : $U_{n+1}^{2i} = A_1 U_n^i$ et $U_{n+1}^{2i+1} = A_{-1} U_n^i$.*

Démonstration : Avec un logiciel de calcul formel on vérifie que :

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1/2 & \varepsilon\gamma_2 & 0 \\ \varepsilon(1/4 + 2\beta_3 - \beta_1/6) & 1 - \gamma_2/2 & \varepsilon 2\beta_1 \\ -(1/4 + 2\beta_3 - \beta_1/6)/2 & \varepsilon(1/2 + 4\alpha_2 + \gamma_2/12) & 2 - \beta_1 \end{pmatrix}, \varepsilon = \pm 1.$$

◇

On obtient alors immédiatement :

$$U_n^i = A_{\varepsilon_1} A_{\varepsilon_2} \dots A_{\varepsilon_n} U_0^0, \varepsilon_j = \pm 1$$

Pour étudier la convergence de U_n^i vers 0, nous avons besoin d'un certain nombre de résultats de Daubechies et Lagarias [3], (noté D-L dans la suite), sur les produits infinis de matrices.

Introduisons les notations utiles. Soit $\| \cdot \|$ une norme sur \mathbb{R}^n . Nous noterons $\| \cdot \|$ la norme matricielle subordonnée sur $\mathbb{R}^{n \times n}$: $\| M \| = \sup_{\|x\|=1} \| Mx \|$. Comme dans l'article de D-L, pour un ensemble Σ de matrices de $\mathbb{R}^{n \times n}$, nous définissons :

- $\rho(M)$, le rayon spectral d'une matrice M ;
- $\rho(\Sigma)$, le rayon spectral généralisé, $\rho(\Sigma) = \limsup_{k \rightarrow +\infty} (\rho_k(\Sigma))^{\frac{1}{k}}$ où

$$\rho_k(\Sigma) = \sup \left\{ \rho \left(\prod_{i=1}^k M_i \right), M_i \in \Sigma, 1 \leq i \leq k \right\};$$

- $\hat{\rho}(\Sigma)$, le rayon spectral joint, $\hat{\rho}(\Sigma) = \limsup_{k \rightarrow +\infty} (\hat{\rho}_k(\Sigma, \| \cdot \|))^{\frac{1}{k}}$, où

$$\hat{\rho}_k(\Sigma, \| \cdot \|) = \sup \left\{ \left\| \prod_{i=1}^k M_i \right\|, M_i \in \Sigma, 1 \leq i \leq k \right\}.$$

A noter que par équivalence des normes sur \mathbb{R}^n , la notion de rayon spectral joint ne dépend pas de la norme choisie, même si $\hat{\rho}_k(\Sigma, \| \cdot \|)$ en dépend.

Rappelons deux résultats de D-L :

1. On a les inégalités :

$$\rho_k(\Sigma)^{\frac{1}{k}} \leq \rho(\Sigma) \leq \hat{\rho}(\Sigma) \leq (\hat{\rho}_k(\Sigma, \| \cdot \|))^{\frac{1}{k}}.$$

2. En utilisant les théorèmes 3-1 et 4-1 de leur article,
si $\Sigma = \{M_1, M_2, \dots, M_m\} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$, les produits $M_{d_1} M_{d_2} \dots M_{d_p}$ tendent
vers la matrice nulle lorsque p tend vers $+\infty$ si et seulement si $\hat{\rho}(\Sigma) < 1$.
Au cours de la démonstration de ce théorème, les auteurs montrent que
si $\hat{\rho}(\Sigma) < 1$, la convergence des produits est géométrique au sens que :
 $\exists t \in \mathbb{N}$ vérifiant $\hat{\rho}_t(\Sigma, \|\cdot\|) < 1$ et

$$\| M_{d_1} M_{d_2} \dots M_{d_p} \| \leq c \kappa^p, \kappa = (\hat{\rho}_t(\Sigma, \|\cdot\|))^{\frac{1}{t}} < 1.$$

Nous pouvons maintenant donner des conditions de convergence sur nos
algorithmes en choisissant $\Sigma = \{A_1, A_{-1}\}$.

Proposition 7 *Pour $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_2, \gamma_3$ donnés vérifiant*

$$\alpha_1 = 1/2, 8\alpha_2 + 16\alpha_3 = -1, \beta_1 + 2\beta_2 = 1, \gamma_2 + 2\gamma_3 = 1,$$

l'algorithme HC² est convergent si et seulement si $\hat{\rho}(\Sigma) < 1$.

Démonstration : Supposons $\hat{\rho}(\Sigma) < 1$ et choisissons la norme infinie :
 $\|\cdot\|_\infty$. Alors en utilisant la condition de convergence de D-L, nous savons
qu'il existe $\kappa \in [0, 1[$ et $c \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$\| A_{d_1} A_{d_2} \dots A_{d_n} \|_\infty \leq c \kappa^n, d_j = \pm 1.$$

A partir d'un vecteur $U = U_0^0$ de données initiales quelconques, on a donc
pour tout n entier,

$$\| U_n^i \| \leq c \kappa^n \| U \|_\infty = c' \kappa^n, 0 \leq i \leq 2^n - 1.$$

On a tout d'abord la majoration :

$$\left| s\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - s\left(\frac{i}{2^n}\right) \right| \leq c' \kappa^n, 0 \leq i \leq 2^n - 1,$$

si bien que par le lemme 3, s est prolongeable par continuité sur $[0, 1]$.
Ensuite comme $h_n = 1/2^n$,

$$\left| 2^n \left(p\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - p\left(\frac{i}{2^n}\right) \right) - \left(s\left(\frac{i+1}{2^n}\right) + s\left(\frac{i}{2^n}\right) \right) / 2 \right| \leq \varepsilon(n) = c' \kappa^n, 0 \leq i \leq 2^n - 1,$$

donc, par le lemme 4, p est prolongeable par continuité et $p' = s$.

Enfin

$$\left| 2^n \left(f\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - f\left(\frac{i}{2^n}\right) \right) - \left(p\left(\frac{i+1}{2^n}\right) + p\left(\frac{i}{2^n}\right) \right) / 2 \right| \leq \varepsilon(n), 0 \leq i \leq 2^n - 1,$$

avec $\varepsilon(n) = c'\kappa^n 2^{-n} + 2^{-n} \sup |s| / 6$.
Donc f est prolongeable par continuité et $f' = p$.

Réciproquement, supposons que l'algorithme converge ; nous allons montrer que les produits de matrices $A_{d_1} A_{d_2} \dots A_{d_n}, d_j = \pm 1$ tendent vers 0. En utilisant des développements de Taylor et la continuité uniforme de s , il est aisé de voir que quel que soit le vecteur U de données initiales, les vecteurs U_n^i tendent vers 0 uniformément. Autrement dit $\|U_n^i\| \leq \varepsilon(n, U)$ soit $\|A_{d_1} A_{d_2} \dots A_{d_n} U\|_\infty \leq \varepsilon(n, U)$, avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n, U) = 0$.

Nous partons des 3 vecteurs V_1, V_2, V_3 où

$V_1 = (1, 0, 0)^T$ pour $y_a = y'_a = 0, y''_a = -1/2, y_b = -1/6, y'_b = 0, y''_b = 1/2$,

$V_2 = (0, 1, 0)^T$, pour $y_a = 0, y'_a = -1/2, y''_a = 0, y_b = 0, y'_b = 1/2, y''_b = 0$,

$V_3 = (0, 0, 1)^T$ pour $y_a = y'_a = y''_a = 0, y_b = 1, y'_b = y''_b = 0$.

Soit $U \in \mathbb{R}^3$ avec $\|U\|_\infty = 1, U = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3$ et $\max |\lambda_i| = 1$.

$$\begin{aligned} \|A_{d_1} A_{d_2} \dots A_{d_n} U\|_\infty &\leq |\lambda_1| \varepsilon(n, V_1) + |\lambda_2| \varepsilon(n, V_2) + |\lambda_3| \varepsilon(n, V_3) \\ &\leq \varepsilon(n, V_1) + \varepsilon(n, V_2) + \varepsilon(n, V_3) = \varepsilon(n) \end{aligned}$$

avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0$.

D'où $\|A_{d_1} A_{d_2} \dots A_{d_n}\|_\infty \leq \varepsilon(n)$ et donc le résultat. \diamond

De manière pratique, compte tenu des inégalités de D-L rappelées ci-dessus, nous obtenons les conditions suivantes :

Proposition 8 (i) *S'il existe une norme $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}^3 et un entier k tel que $\hat{\rho}_k(\Sigma, \|\cdot\|) < 1$, alors l'algorithme converge.*

(ii) *S'il existe k entier tel que $\rho_k(\Sigma) > 1$, alors l'algorithme diverge.*

5. Domaine de convergence et exemples

La détermination pratique du rayon spectral joint est difficile. Berger et Wang [1] ont montré que pour un ensemble Σ de matrices uniformément bornées, alors $\rho(\Sigma) = \hat{\rho}(\Sigma)$, ce qui est le cas ici. Rappelons aussi un de leurs résultats qui permet, dans certains cas, d'évaluer $\hat{\rho}(\Sigma)$.

Si les M_i sont triangulaires par blocs, $M_i = \begin{pmatrix} M_i^1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & M_i^l \end{pmatrix}$ où les M_i^p

sont des matrices carrées de même dimension lorsque i varie, alors

$$\hat{\rho}(M_1, \dots, M_m) = \max(\hat{\rho}(M_1^1, \dots, M_m^1), \dots, \hat{\rho}(M_1^l, \dots, M_m^l)). \quad (*)$$

Si le nombre de paramètres initiaux est important, la condition nécessaire de convergence de la proposition 3 entraîne que l'algorithme HC^2 ne dépend plus que de 4 paramètres, par exemple: $\alpha_2, \beta_1, \beta_3$ et γ_2 .

Proposition 9 *Si $\alpha_1 = 1/2, 8\alpha_2 + 16\alpha_3 = -1, \beta_1 + 2\beta_2 = 1, \gamma_2 + 2\gamma_3 = 1$ et si de plus $1/4 + 2\beta_3 - \beta_1/6 = 0$ et $1/2 + 4\alpha_2 + \gamma_2/12 = 0$, alors l'algorithme converge si et seulement si: $|1 - \gamma_2/2| < 1$ et $|2 - \beta_1| < 1$.*

Démonstration : Compte tenu des hypothèses, la matrice A_ε s'écrit :

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1/2 & \varepsilon\gamma_2 & 0 \\ 0 & 1 - \gamma_2/2 & \varepsilon 2\beta_1 \\ 0 & 0 & 2 - \beta_1 \end{pmatrix}, \varepsilon = \pm 1.$$

En utilisant (*), il vient :

$$\hat{\rho}(A_1, A_{-1}) = \max(1/2, |1 - \gamma_2/2|, |2 - \beta_1|),$$

d'où le résultat. \diamond

Exemple 10 Les paramètres correspondant au polynôme d'Hermite vérifient les hypothèses.

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1/2 & \varepsilon.3/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & \varepsilon.15/4 \\ 0 & 0 & 1/8 \end{pmatrix}, \hat{\rho}(A_1, A_{-1}) = 1/2.$$

De même pour l'interpolant de classe C^3 polynômial de degré 4 sur $[0, 1/2]$ et $[1/2, 1]$, (spline quartique à 1 noeud), pour lequel

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1/2 & \varepsilon.3/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & \varepsilon.4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\rho}(A_1, A_{-1}) = 1/2.$$

Nous ajoutons maintenant seulement l'hypothèse : $1/4 + 2\beta_3 - \beta_1/6 = 0$ et définissons $B_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 - \gamma_2/2 & \varepsilon 2\beta_1 \\ \varepsilon(1/2 + 4\alpha_2 + \gamma_2/12) & 2 - \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \varepsilon b \\ \varepsilon c & d \end{pmatrix}$, $\varepsilon = \pm 1$.

Proposition 11 Si $\alpha_1 = 1/2, 8\alpha_2 + 16\alpha_3 = -1, \beta_1 + 2\beta_2 = 1, \gamma_2 + 2\gamma_3 = 1$ et si de plus $1/4 + 2\beta_3 - \beta_1/6 = 0$, alors l'algorithme HC^2 converge si et seulement si $\hat{\rho}(B_1, B_{-1}) < 1$. Une condition suffisante de convergence est :

$$|1 - \gamma_2/2| < 1, |2 - \beta_1| < 1$$

$$\text{et } |1/2 + 4\alpha_2 + \gamma_2/12| \cdot |2\beta_1| < (1 - |1 - \gamma_2/2|)(1 - |2 - \beta_1|).$$

Démonstration : La première partie résulte du rappel (*). Pour la seconde, choisissons sur \mathbb{R}^2 , la norme $\|(x, y)^T\| = |x| + \lambda|y|$ où λ est un réel strictement positif à fixer. Alors :

$$\|B_\varepsilon\| \leq \max(|a| + \lambda|c|, \frac{|b|}{\lambda} + |d|).$$

Peut-on choisir λ tel que : $|a| + \lambda|c| < 1, \frac{|b|}{\lambda} + |d| < 1$? Pour cela, il suffit que : $1 - |a| > 0, 1 - |d| > 0$ et $|c| \cdot |b| < (1 - |a|)(1 - |d|)$, ce qui permet de conclure. \diamond

Exemple 12 Dans le cas de l'interpolant de classe C^2 , polynômial de degré 3 par morceaux sur $[0, 1/3], [1/3, 2/3]$ et $[2/3, 1]$, (spline cubique à 2 noeuds),

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1/2 & \varepsilon.3/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & \varepsilon.9/2 \\ 0 & -\varepsilon.3/72 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

L'inégalité : $(1/72).(9/2) < (1 - 1/4).(1 - 1/4) = 9/16$ nous assure la convergence.

Dans le cas général, on pourra rechercher une norme sur \mathbb{R}^3 sous la forme $\|(x, y, z)^T\| = |x| + \lambda_1|y| + \lambda_2|z|$.

Illustrations : Dans les figures ci-dessous, nous avons interpolé les données suivantes :

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f(1) = 1, f'(1) = -1, f''(1) = 0,$$

et représenté les trois fonctions f, f', f'' sur un même graphe. La convergence est assurée par les propositions 9 ou 11. Attention aux changements d'échelle dans les illustrations.

fig 1 : $\alpha_1 = 1/2, \alpha_2 = -5/32, \alpha_3 = 1/64, \beta_1 = 15/8, \beta_2 = -7/16, \beta_3 = 1/32, \gamma_2 = 3/2, \gamma_3 = -1/4$, spline quintique.

fig 2 : $\alpha_1 = 1/2, \alpha_2 = -5/32, \alpha_3 = 1/64, \beta_1 = 2, \beta_2 = -1/2, \beta_3 = 1/24, \gamma_2 = 3/2, \gamma_3 = -1/4$, spline quartique à un noeud : $1/2$.

fig 3 : $\alpha_1 = 1/2, \alpha_2 = -23/144, \alpha_3 = 5/288, \beta_1 = 9/4, \beta_2 = -5/8, \beta_3 = 1/16, \gamma_2 = 3/2, \gamma_3 = -1/4$, spline cubique à 2 noeuds : $1/3, 2/3$.

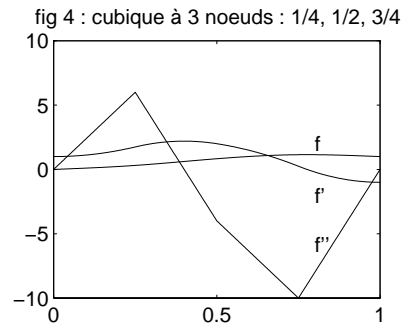
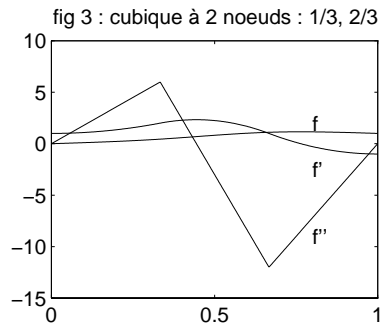
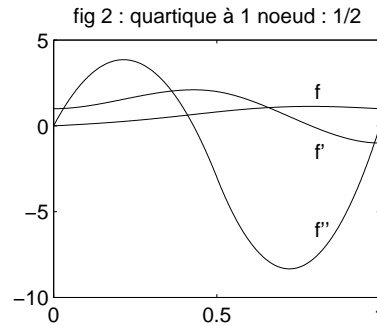
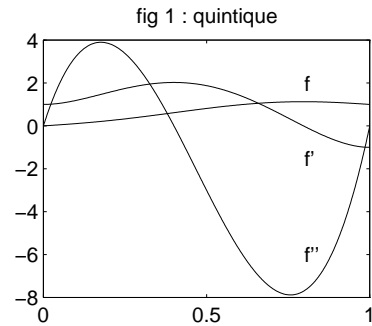
fig 4 : $\alpha_1 = 1/2, \alpha_2 = -1/6, \alpha_3 = 1/48, \beta_1 = 2, \beta_2 = -1/2, \beta_3 = 1/24, \gamma_2 = 2, \gamma_3 = -1/2$, spline cubique à 3 noeuds : $1/4, 1/2, 3/4$.

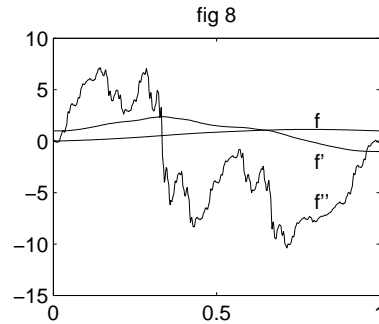
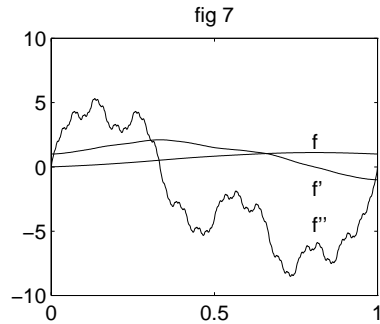
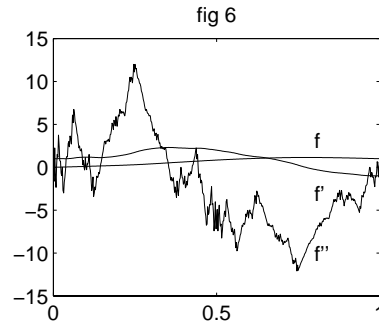
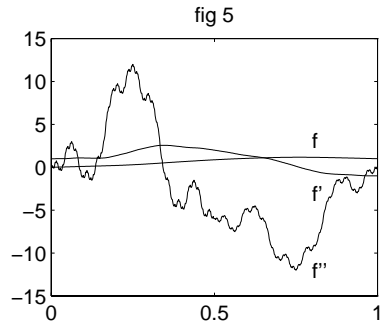
fig 5 : $\alpha_1 = 1/2, \alpha_2 = -3/16, \alpha_3 = 1/32, \beta_1 = 2, \beta_2 = -1/2, \beta_3 = 1/24, \gamma_2 = 3, \gamma_3 = -1$.

fig 6 : $\alpha_1 = 1/2, \alpha_2 = -11/64, \alpha_3 = 3/128, \beta_1 = 2, \beta_2 = -1/2, \beta_3 = 1/24, \gamma_2 = 3, \gamma_3 = -1$.

fig 7 : $\alpha_1 = 1/2, \alpha_2 = -1/6, \alpha_3 = 1/48, \beta_1 = 3/2, \beta_2 = -1/4, \beta_3 = 0, \gamma_2 = 2, \gamma_3 = -1/2$.

fig 8 : $\alpha_1 = 1/2, \alpha_2 = -3/16, \alpha_3 = 1/32, \beta_1 = 3/2, \beta_2 = -1/4, \beta_3 = 0, \gamma_2 = 2, \gamma_3 = -1/2$.





6. Conclusion

On a donné une famille générale d'interpolants de classe C^2 sur un segment à partir de données d'Hermite aux extrémités. Les conditions de convergence sont facilement généralisables à la classe C^n : il suffit de déterminer les conditions nécessaires sur les paramètres puis de construire les 2 matrices A_ε .

A partir de ces algorithmes, on peut également construire des courbes paramétrées de classe C^2 ou C^n .

Une technique similaire a permis d'obtenir des surfaces de classe C^1 à partir de données sur une triangulation. On peut espérer ensuite passer aux surfaces interpolant des données générales d'Hermite aux sommets d'une triangulation ou d'un maillage rectangulaire.

Références

- [1] M. A. Berger, Y. Wang, *Bounded Semigroups of Matrices*, Linear Algebra and its Applications 166, (1992) 21-27.

- [2] W. Boehm, G. Farin, J. Kahmann, *A survey of curve and surface methods in CAGD*, Computer Aided Geometric Design 1, (1984) 1-60.
- [3] I. Daubechies et J. C. Lagarias, *Set of Matrices All Infinite Products of Which Converge*, Linear Algebra and its Applications 161, (1992) 227-263.
- [4] G. Deslauriers, S. Dubuc, *Interpolation dyadique*, In Fractals. Dimensions non entières et applications. Ed : Masson, Paris, (1987) 44-55.
- [5] S. Dubuc, *Interpolation through an Iterative Scheme*, Math. Anal. Appl. 114, (1986), 185-204.
- [6] N. Dyn, D. Levin, J. A. Gregory, *A 4-point interpolatory subdivision scheme for curve design*, Computer Aided Geometric Design 4, (1987) 257-268.
- [7] N. Dyn, D. Levin, *Analysis of Hermite-type subdivision schemes*, Approximation Theory VIII.Vol 2: Wavelets and Multilevel Approximation, Ed : C. K. Chui and L.L. Schumaker. World Scientific, Singapore (1995), 117-124.
- [8] G. Faber, *Über stetige Functionen*, Math. Ann. 66, (1909) 81-94.
- [9] J.-L. Merrien, *A family of Hermite interpolants by bisection algorithm*, Numerical Algorithms 2, (1992), 187-200.
- [10] C. A. Micchelli, *Mathematical Aspects of Geometric Modeling*, SIAM, Philadelphia, (1995).