Master 2 statistique économétrie - Université Rennes 1

Séries chronologiques non linéaires

TD 2

Exercice 1: Modélisation STR. Le but de cet exercice est l'étude de séries non linéaires à l'aide du modèle STR. Les données sont générées par le programme temp.sas.

1- Lancer le logiciel JMulTi à l'aide de la commande 'jmrun'. Importer les données et représenter la série. Représenter x_t en fonction de x_{t-1} ainsi que les autocorrélations de la série. Que constatez vous?

2- Spécifier le nombre de retards à inclure dans le modèle. Effectuer un test de linéarité en essayant plusieurs dans les variables de transition. Que constatez? Quelles sont les variables que vous pensez inclure dans le modèle?

3- Spécifier une grille de valeurs de départ pour l'algorithme d'estimation. Quel est le but d'un choix de valeurs de départ? Essayer plusieurs grilles, puis estimer le modèle. Commenter les résultats.

4- Effectuer les différents tests d'adéquation du modèle. Spécifier les paramètres de tests les résultats et commenter en vous appuyant sur les informations contenues dans l'onglet 'Help'. Représenter les résidus, la fonction de transition ainsi que la partie linéaire et non linéaire du modèle.

Exercice 2: On suppose qu'un processus (x_t) suit le modèle suivant:

$$x_t = ax_{t-1} + \epsilon_t,$$

où $\mid a \mid< 1$ et (ϵ_t) est dépendant, et tel que $E(\epsilon_t \mid \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots) = 0$ (cas des modèles GARCH par exemple qui présentent de l'hétéroscédasticité..). On suppose en outre que les erreurs sont stationnaires ergodiques. On observe $x_1, \dots, x_n$. Le but de cet exercice est de tester l'hypothèse $H_0 : a = 0$ contre $H_1 : a \neq 0$.

1- Expliquer pourquoi le processus (x_t) est non linéaire.

2- Donner l'expression de l'estimateur des moindres carrés $\hat{a}$de a.

3- Donner le comportement asymptotique de $n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{n} \epsilon_t x_{t-1}$ et $n^{-1} \sum_{i=1}^{n} x_t^2$.

4- En déduire le comportement asymptotique de $\hat{a}$ (utiliser le lemme de Slutsky).

5- Construire un test de nullité du paramètre a. Conclure.

Exercice 3: Modélisation NAR. Le but de cet exercice est l'étude de séries non linéaires à l'aide d'une modélisation non paramétrique. On considère des séries générées par le programme 'temp.sas'. On note les observations $x_1, \ldots, x_n$.

1- Spécifier le nombre de retards à inclure dans le modèle.

2- Estimer le modèle. Calculer l'estimation de l'espérance conditionnelle en un point de votre choix. Représenter les intervalles de confiance de Bonferroni en fonction des retards inclus dans le modèle.

3- Etudiez les résidus pour vérifier le bon ajustement du modèle aux données.

4- Spécifiez la variance conditionnelle et estimer le modèle. Vérifier l'adéquation de la variance conditionnelle aux données.

5- Donner la prévision $\hat{x}_{n+1}$.

Exercice 4: Démonstration du théorème de Granger pour $p = 1$. On considère le modèle suivant:

$$\Delta X_t = \alpha_0 \beta_0' X_{t-1} + \nu + \epsilon_t,$$

où X_t est de dimension d et $\Delta X_t := X_t - X_{t-1}$.

1- Soit $U_t = \beta_0' X_t$. Ré-écrire le modèle en multipliant à gauche par β_0' et en faisant apparaître U_t. Ecrire U_t sous forme moyenne mobile infinie.

2- Multiplier le modèle par $\alpha_{0\perp}'$ à gauche. Que peut-t-on dire du processus $(\alpha_{0\perp}' X_t)$? En déduire une écriture de ce processus sous forme de marche aléatoire.

3- En utilisant l'identité $\beta_{0\perp}(\alpha'_{0\perp}\beta_{0\perp})^{-1}\alpha'_{0\perp} + \alpha_0(\beta'_0\alpha_0)^{-1}\beta'_0 = I$, Retrouvez le résultat du Théorème de Granger pour notre cas.