

Mémoire pour l'obtention du Diplôme d'Étude
Approfondie (D.E.A) en Mathématiques
Appliquées et Sciences Economiques
Thème : Modèles GARCH multivariés

RAÏSSI HAMDI

Université Charles De Gaulle Lille 3

Laboratoire : GREMARS

hamdi.raissi@etu.univ-lille3.fr

Directeurs de mémoire : JEAN-MICHEL ZAKOÏAN

CHRISTIAN FRANCO

Année académique 2003-2004

Table des matières

1	Introduction	3
	Introduction	3
2	Modèles GARCH vectoriels	5
2.1	Modèle Diagonal	6
2.2	Généralité du modèle vectoriel	7
3	Modèle BEKK	8
3.1	Identifiabilité du modèle BEKK pour GARCH(1,1) quand $K = 1$	10
3.2	Généralité de la représentation BEKK pour le modèle GARCH(1,1)	11
3.3	Comparaison entre le modèle BEKK et le modèle vectoriel . .	17
3.4	Etude de la stationnarité	19
4	Modèles GARCH-Cholesky	22
4.1	Asymétrie dans le modèle GARCH-Cholesky	25
4.2	Etude des paramètres de $h_{ij,t}$ dans le cas GARCH(1,1) quand $n=2$	26
5	Modèles à corrélations conditionnelles constantes et exten- sions	27
5.1	Vraisemblance	28
5.2	Modèles a corrélations constantes dynamiques	29
5.3	Extention	30
5.4	Stationnarité	32
5.5	identifiabilité	34

5.6	Notion de formulation GARCH minimale	36
6	Conclusion	40
7	Références	40

1 Introduction

Les modèles GARCH ont été introduits pour rendre compte des propriétés des séries financières, et en particulier de leur hétéroscédasticité. Engle (1982) a proposé le modèle ARCH(q). Ce modèle est celui qui a rencontré le plus de succès dans la littérature. Bollerslev(1986) a ensuite généralisé le modèle ARCH(q) : c'est le modèle ARCH(p,q) généralisé ou GARCH((p,q). Le modèle GARCH(p,q) univarié consiste à écrire la variance conditionnelle du processus GARCH en fonction de son passé. Dans le cas d'un GARCH fort, on dit que $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ suit un processus GARCH si :

$$\begin{cases} \epsilon_t = \sigma_t \eta_t \\ \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (\text{avec } \sigma_t^2 \text{ } I_{t-1} \text{ mesurable}) \end{cases}$$

où $\omega, \alpha_i, \beta_i$ des réels positifs. Le processus η_t est iid, tel que $E(\eta_t) = 0$ et $V(\eta_t) = 1$, σ_t^2 est la variance conditionnelle du processus GARCH, et I_t désigne la tribu engendrée par les valeurs passées de ϵ_t .

Bien que dans le cas univarié le modèle GARCH ait été l'objet de nombreuses études, le cas multivarié reste encore peu étudié. Dans le cas multivarié, on considère un vecteur $\epsilon_t = (\epsilon_{1,t}, \dots, \epsilon_{n,t})'$ et la matrice de covariance

conditionnelle H_t du processus $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ à la date t de terme général $h_{ij,t}$:

$$H_t = E_{t-1}(\epsilon_t \epsilon_t').$$

Dans les modèles GARCH multivariés, on exprime cette matrice de covariance conditionnelle en fonction du passé du processus $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ et des propres valeurs passées de H_t . Une première approche consiste à considérer un processus GARCH multivarié $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ ayant pour composantes des processus GARCH univariés indépendants entre eux. Mais cette façon de traiter le problème est restrictive. En effet, l'étude des séries financières a mis en évidence une corrélation non nulle entre les composantes des processus GARCH multivariés. Ainsi, différentes formulations tenant compte des corrélations entre les composantes d'un processus GARCH multivarié (ou MGARCH) ont été introduites. De la même manière que dans le cas univarié, on dit que $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ est un processus MGARCH(p,q) si :

$$\begin{cases} \epsilon_t = H_t^{1/2} \eta_t \\ g(H_t) = f(H_{t-1}, \dots, H_{t-p}, \epsilon_{t-1}, \dots, \epsilon_{t-q}) \end{cases}$$

avec $H_t^{1/2}$ une matrice telle que $H_t^{1/2} H_t^{1/2} = H_t$. Le processus $\{\eta_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ est un processus de dimension n , iid tel que pour tout $t \in \mathbb{N}$ on a : $E(\eta_t) = 0$ et $E(\eta_t \eta_t') = \Gamma$, la matrice Γ étant une matrice carrée de dimension n . Notons enfin que f est une transformation I_{t-1} mesurable et g une transformation I_t mesurable. On voit que la notion de GARCH fort n'a de sens que si $H_t^{1/2}$ existe et donc que H_t est définie positive. Ainsi f est une transformation qui doit assurer la définie positivité de la matrice H_t . Le but de ce mémoire est de présenter les différents modèles GARCH-multivariés. A travers ces approches pour représenter l'hétéroscédasticité conditionnelle des séries financières, nous étudierons les restrictions intrinsèques à ces modèles, et les

restrictions motivées par l'identifiabilité de ces modèles et la définie positivité de la matrice H_t . Dans la section 1, nous allons présenter le modèle vectoriel et une version restreinte du modèle vectoriel qui est le modèle vectoriel diagonal. Dans la section 2, nous étudierons le modèle BEKK : nous verrons notamment que le modèle vectoriel ne peut être considéré que dans le cadre des modèles BEKK. Dans la section 3, nous nous intéresserons au modèle GARCH-Cholesky qui a la particularité d'assurer la définie positivité de la matrice H_t en considérant une transformation de celle-ci. Enfin nous étudierons dans la section 4 les modèles à corrélation constante et ses extensions. Nous allons voir dans cette partie que le principal intérêt de ce modèle est la facilité de calcul du quasi-maximum de vraisemblance lors de l'estimation des paramètres.

2 Modèles GARCH vectoriels

Le modèle vectoriel a été introduit par Engle et Kroner (1995), ce modèle est le plus simple pour représenter H_t par rapport à son passé. En effet, cette représentation présente une expression de H_t similaire à l'expression de la volatilité dans le cas univarié :

$$h_t = C_0 + \sum_{i=1}^q A_i e_{t-i} + \sum_{j=1}^p B_j h_{t-j} \quad (2.1)$$

où $e_t = \text{vec}(\epsilon_t \epsilon_t')$, $h_t = \text{vec}(H_t)$, A_i, B_i matrices de dimension $n \times n$, et C_0 vecteur de dimension n . L'opérateur vec appliqué à une matrice consiste à mettre en une seule colonne les colonnes d'une matrice. Cependant la matrice H_t étant clairement symétrique certaines équations du modèle précédent sont redondantes, il est donc préférable d'utiliser l'opérateur $\text{vech}(\cdot)$ dans (2.1) qui

met en seule colonne la partie triangulaire supérieure d'une matrice. Ainsi les dimensions des matrices A_i et B_j , sont de dimension $(n(n+1))/2 \times (n(n+1))/2$, et C_0 est un vecteur de dimension $(n(n+1))/2$, le nombre de paramètres est ainsi considérablement réduit. On peut écrire le modèle en regroupant le vecteur C_0 et les matrices de paramètres dans une même matrice :

$$h_t = Fz_t = (z_t' \otimes I) \text{vec}(F) = Z_t \alpha \quad (2.2)$$

Avec $z_t' = (1, \epsilon'_{t-1}, \dots, \epsilon'_{t-q}, h'_{t-1}, \dots, h'_{t-p})$, $\alpha = \text{vec}(F)$,
 $F = (C_0 \ A_1 \cdots A_q \ B_1 \cdots B_p)$ et $Z_t = (z_t' \otimes I)$.

Pour illustrer le modèle vectoriel considérons le modèle GARCH(1,1) avec deux équations ($n = 2$) en utilisant l'opérateur $\text{vech}(\cdot)$:

$$\begin{aligned} h_t = \begin{pmatrix} h_{11,t} \\ h_{21,t} \\ h_{22,t} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{1,t-1}^2 \\ \epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1} \\ \epsilon_{2,t-1}^2 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{12,t-1} \\ h_{22,t-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

2.1 Modèle Diagonal

Dans certaines séries financières, on peut supposer que les volatilités et les covariances ne dépendent que de leurs valeurs passées dans le modèle précédent. Ainsi, $h_{rs,t}$ ne dépend que des valeurs passées de $\epsilon_{r,t}\epsilon_{s,t}$. Dans ce

modèle les matrices A_i et B_j sont des matrices diagonales ce qui réduit le nombre de paramètres. Dans le cas de l'exemple précédent on obtient :

$$h_t = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{1,t-1}^2 \\ \epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1} \\ \epsilon_{2,t-1}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{12,t-1} \\ h_{22,t-1} \end{pmatrix}.$$

On peut cependant remarquer que le modèle diagonal ne correspond pas au modèle où il n'existe pas de corrélation entre les composantes du processus GARCH multivarié car H_t n'est pas diagonale.

Remarque 2.1 *La représentation vectorielle (et donc à priori le modèle diagonal) telle qu'elle est définie dans la partie précédente ne tient pas compte de la définie positivité nécessaire de H_t . Les hypothèses établissant la définie positivité pour H_t à chaque date t pour le modèle vectoriel ne sont pas claires. Ainsi, il est difficile de considérer un GARCH fort pour les processus multivariés dans le cadre de ce modèle.*

2.2 Généralité du modèle vectoriel

Définition 2.1 *Un modèle est général quand tous les termes $\epsilon_{r,t-i}\epsilon_{s,t-i}$ et $h_{rs,t-i}$ peuvent apparaître dans l'expression de chaque terme de la matrice de covariance H_t , de plus, aucune combinaison de valeurs entre les coefficients de chaque terme ne doit être écartée par l'expression de ce modèle.*

D'après la définition précédente le modèle vectoriel est général. En effet chaque élément de la matrice H_t est une fonction linéaire des valeurs passées de $\epsilon_{r,t-i}\epsilon_{s,t-i}$ et de $h_{rs,t-i}$ dans le modèle vectoriel. Ainsi, grâce à sa linéarité la notion de généralité est facilement vérifiable pour le modèle vectoriel.

3 Modèle BEKK

Le modèle BEKK ¹ suivant a été introduit par Engle et Kroner (1995) pour imposer la restriction de définie positivité à la matrice H_t sous des conditions très faibles.

L'expression de la matrice H_t à chaque instant t dans le modèle BEKK nous est donnée par la relation suivante :

$$H_t = C'C + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^q A'_{ik} \epsilon_{t-i} \epsilon'_{t-i} A_{ik} + \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^p B'_{jk} H_{t-j} B_{jk} \quad (3.1)$$

où A_{ik} , B_{jk} , $k \in \{1, \dots, K\}$ sont des matrices de dimension $n \times n$ et C est une matrice constante de dimension $n \times n$.

L'introduction de la somme sur l'entier k est motivée par un problème de généralité du modèle que nous aborderons plus loin.

Exemple 3.1 *Considérons le modèle GARCH(1,1) avec $K = 1$. L'expression du modèle est la suivante :*

$$H_t = C'C + A' \epsilon_{t-1} \epsilon'_{t-1} A + B' H_{t-1} B.$$

Dans le cas où $n = 2$, la relation précédente devient :

$$\begin{aligned} H_t = & C'C + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \epsilon_{1,t-1}^2 & \epsilon_{1,t-1} \epsilon_{2,t-1} \\ \epsilon_{2,t-1} \epsilon_{1,t-1} & \epsilon_{2,t-1}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} h_{11,t-1} & h_{12,t-1} \\ h_{21,t-1} & h_{22,t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.2)$$

¹Le terme BEKK est un acronyme formé par les initiales des noms Baba, Engle, Kroner et Kraft

On remarque que ce modèle nécessite moins de paramètres que le modèle GARCH(1,1) proposé en exemple pour le modèle vectoriel. Cependant, le nombre de paramètres croît quadratiquement avec n . Ainsi, il est préférable de réduire ce nombre, tout en imposant des restrictions nous assurant l'identifiabilité et la généralité du modèle.

Engle et Kroner(1995) ont établi la proposition suivante qui nous donne des conditions que doit remplir le modèle pour que H_t soit définie positive $\forall t \in \mathbb{N}$.

Proposition 3.1 *Si $H_0, H_{-1}, \dots, H_{-p+1}$ sont définies positives, alors H_t est définie positive dans le modèle BEKK si :*

$$\ker\{C\} \bigcap_{j=1}^p \bigcap_{k=1}^K \ker\{B_{jk}\} = \{0\}.$$

On voit que les conditions pour obtenir une matrice H_t définie positive quelque soit $t \in \mathbb{N}$ sont faibles : la condition portant sur les noyaux des matrices C et B_{jk} $j \in \{1, \dots, n\}$ est vérifiée si la matrice C ou l'une des matrices B_{jk} est de plein rang. De plus on remarque dans cette proposition que les conditions portent sur les termes GARCH et la partie constante seulement de l'expression de la représentation BEKK. En effet la quantité $A'_{ik}\epsilon_{t-i}\epsilon'_{t-i}A_{ik}$ est semi-définie positive car $\epsilon_{t-i}\epsilon'_{t-i}$ est semi-définie positive. Ainsi, pour assurer la définie positivité de H_t il suffit que $C'C + \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^p B'_{jk}H_{t-j}B_{jk}$ soit définie positive.

Une conséquence de cette proposition est que pour le modèle MARCH la condition nécessaire à la définie positivité de H_t , $t \in \mathbb{N}$, devient $\ker\{C\} = \{0\}$, c'est à dire que C soit de plein rang.

Remarque 3.1 *Une condition suffisante de la proposition précédente serait de prendre la matrice C triangulaire avec des éléments diagonaux strictement*

positifs. En effet une telle matrice est de plein rang. Nous allons voir que cette hypothèse nous permet d'identifier le modèle.

3.1 Identifiabilité du modèle BEKK pour GARCH(1,1) quand $K = 1$.

Dans ce paragraphe, nous supposons que la matrice C est triangulaire.

Proposition 3.2 *Pour un modèle GARCH(1,1) défini par (3.2), supposons que les éléments de la diagonale de C sont positifs. Si de plus a_{11} et b_{11} positifs, alors il n'existe pas d'autre matrice C , A ou B donnant une représentation équivalente du modèle. (C'est à dire une même matrice de covariance H_t pour un même processus donné $\forall t \in \mathbb{Z}$)*

La condition de positivité des éléments diagonaux vient du fait que la décomposition d'une matrice en produit de matrice triangulaire et sa transposée existe toujours et est unique si les éléments sur la diagonale de la matrice triangulaire sont positifs (Proposition 58, Remarque 34 Dhrymes 1984, pp 68-69). Ecrivons maintenant l'élément $h_{lm,t}$ de la matrice H_t :

$$h_{lm,t} = c_{lm} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{il} a_{jm} \epsilon_{i,t-1} \epsilon_{j,t-1} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{il} b_{jm} h_{ij,t-1}. \quad (3.3)$$

Si on écrit le terme $h_{11,t}$ en ignorant les termes GARCH, on obtient :

$$h_{11,t} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i1} a_{j1} \epsilon_{i,t-1} \epsilon_{j,t-1}.$$

On remarque que le coefficient correspondant à $\epsilon_{1,t-1}^2$ dans l'équation de $h_{11,t}$ est a_{11}^2 . Ainsi a_{11} est identifié à un signe près qu'on fixe comme étant positif. Le coefficient correspondant au terme $\epsilon_{i,t-1} \epsilon_{j,t-1}$ dans cette équation

est $(a_{11}a_{j1} + a_{j1}a_{11}) = 2a_{11}a_{j1}$. On en déduit que a_{j1} est identifié car a_{11} est déjà identifié. Ainsi la première colonne de la matrice A est identifiée. Ecrivons maintenant le terme $h_{12,t}$ de la matrice H_t en ignorant toujours les termes GARCH :

$$h_{12,t} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i1}a_{j2}\epsilon_{i,t-1}\epsilon_{j,t-1}.$$

Dans cette équation, le coefficient correspondant au terme $\epsilon_{1,t-1}^2$ est $(a_{11}a_{12} + a_{12}a_{11}) = 2a_{11}a_{12}$. Comme a_{11} est identifié, alors on peut identifier a_{12} . De la même manière, en considérant les termes $\epsilon_{1,t-1}\epsilon_{j,t-1}$ dans l'équation précédente, on identifie les coefficients a_{j2} . Nous avons donc identifié la deuxième colonne de la matrice A . Un raisonnement similaire nous permet d'identifier les autres colonnes de la matrice A et la matrice B du modèle défini en (4.2).

Remarque 3.2 *La matrice C a été choisie comme étant triangulaire par souci de simplicité, cependant on peut prendre n'importe quelle factorisation qui nous assure le fait que la partie constante est une matrice définie positive.*

3.2 Généralité de la représentation BEKK pour le modèle GARCH(1,1)

Pour assurer la généralité du modèle BEKK et rendre possible certaines combinaisons de paramètres écartées par les contraintes de définie positivité et d'identifiabilité, on doit prendre $K > 1$. Cependant si K est grand, le nombre de paramètres à estimer devient important, ainsi on doit choisir un entier K minimal assurant l'élimination de toutes les restrictions du modèle. Engle et Kroner (1995) nous donnent deux conditions nécessaires à vérifier pour que le modèle GARCH(1,1) soit général :

Proposition 3.3 *Pour qu'il soit général le modèle BEKK GARCH(1,1) doit vérifier les deux conditions suivantes :*

a-Soit $s=n(n+1)/2$, alors K doit être assez grand pour qu'il y ait un total d'au moins s^2 éléments dans les matrices .

b-Soit $a_{ij,k}$ le i,j ème élément d'une matrice A_{1k} . Alors, il doit exister une matrice A_{1k} qui contient ou bien la paire $a_{il,k}$ et $a_{jm,k}$ ou bien la paire $a_{jl,k}$ et $a_{im,k}$ pour tous les i, j, l, m entre 1 et n .

Des restrictions similaires doivent être étendues aux matrices B_{1k} .

La première condition impose qu'il y ait plus de paramètres dans le modèle BEKK que dans le modèle vectoriel, s'il a moins de s^2 paramètres cela revient à imposer des conditions sur le modèle. La deuxième condition impose que certaines paires de paramètres doivent apparaître ensemble dans une matrice A_{1k} . En effet, en écrivant l'expression de $h_{lm,t}$:

$$h_{lm,t} = c + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{il,k} a_{jm,k} \epsilon_{i,t-1} \epsilon_{j,t-1} + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{il,k} b_{jm,k} h_{ij,t-1}.$$

On remarque que le coefficient correspondant à $\epsilon_{i,t-1} \epsilon_{j,t-1}$ est :

$$\sum_{k=1}^K a_{il,k} a_{jm,k} + a_{jl,k} a_{im,k} \quad \text{si } i \neq j$$

$$\sum_{k=1}^K a_{il,k} a_{im,k} \quad \text{si } i = j.$$

Ainsi, il doit exister $k \in \{1, \dots, K\}$ tel que $a_{il,k}$ et $a_{jm,k}$ ou $a_{il,k}$ et différents de zéro pour que le terme $\epsilon_{i,t-1} \epsilon_{j,t-1}$ puisse apparaître dans l'expression de $h_{lm,t}$.

Ce qui nous donne la deuxième condition.

Exemple 3.2 : Cas $n = 2$.

1- L'ensemble de matrices suivantes :

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11,1} & a_{12,1} \\ 0 & a_{22,1} \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} a_{11,2} & a_{12,2} \\ a_{21,2} & 0 \end{pmatrix}, A_{13} = \begin{pmatrix} a_{11,3} & 0 \\ a_{21,3} & a_{22,3} \end{pmatrix},$$

satisfait les deux conditions énoncées : d'une part le nombre de paramètres est égal à neuf qui correspond à s^2 quand $n=2$. D'autre part on remarque que $\forall a_{ij,k}$ un élément de A_{1k} , il existe une matrice $A_{1k'}$ telle que $a_{ij,k} \times a_{lm,k'} \neq 0 \quad \forall i, j \in \{1, 2\}$, et $k, k' \in \{1, 2, 3\}$.

2- Considérons maintenant l'ensemble de matrices suivantes :

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11,1} & a_{12,1} \\ 0 & a_{22,1} \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} a_{11,2} & a_{12,2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} a_{11,3} & 0 \\ a_{21,3} & 0 \end{pmatrix}, A_{14} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12,4} \\ 0 & a_{22,4} \end{pmatrix}.$$

Cet ensemble de matrices n'engendre pas une représentation générale, car il ne respecte pas la deuxième condition de la proposition. En effet, les éléments a_{21} et a_{22} n'apparaissent jamais ensemble dans une matrice A_{1k} . Si on écrit les équations exprimant $h_{12,t}$ ou $h_{21,t}$ on obtient :

$$h_{12,t} = c_1 + (a_{11,1}a_{12,1} + a_{11,2}a_{12,2}\epsilon_{1,t-1}^2 + 2a_{11,1}a_{22,1}\epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1}$$

$$h_{21,t} = c_2 + (a_{11,1}a_{12,1} + a_{11,2}a_{12,2}\epsilon_{1,t-1}^2 + 2a_{22,1}a_{11,1}\epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1}$$

le coefficient correspondant à $\epsilon_{2,t-1}^2$, qui est $\sum_{k=1}^K a_{21,k}a_{22,k}$ n'apparaît pas. Ainsi le terme $\epsilon_{2,t-1}^2$ sera éliminé des équations exprimant $h_{12,t}$ et $h_{21,t}$, ce qui constitue une restriction.

Cependant les conditions énoncées ci-dessus sont des conditions nécessaires, mais non suffisantes pour la généralité du modèle BEKK. Si on considère l'ensemble de matrices suivantes :

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11,1} & a_{12,1} \\ a_{21,1} & a_{22,1} \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12,2} \\ 0 & a_{22,2} \end{pmatrix},$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12,3} \\ 0 & a_{22,3} \end{pmatrix}, A_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22,4} \end{pmatrix}.$$

Cet ensemble de matrices satisfait les conditions de la proposition, mais n'est cependant pas pleinement général, car si l'on écrit l'expression du terme $h_{11,t}$ on obtient :

$$h_{11,t} = c + a_{11,1}^2 \epsilon_{1,t-1}^2 + 2a_{11,1}a_{21,1} \epsilon_{1,t-1} \epsilon_{2,t-1} + a_{21,1}^2 \epsilon_{2,t-1}^2$$

On peut remarquer que le paramètre $a_{11,1}$ correspond au terme $\epsilon_{1,t-1}^2$, le paramètre $a_{11,1}a_{21,1}$ correspond au terme $\epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1}$, les paramètres $a_{11,1}$ et $a_{21,1}$ sont fixés ce qui ne laisse aucune liberté au paramètre exprimant la quantité $\epsilon_{2,t-1}^2$ dans l'équation de $h_{11,t}$, ce qui est une restriction pour le modèle. Dans notre exemple, la restriction est due au fait qu'il n'y a que deux paramètres pour trois termes dans la première équation. En fait, il est possible de trouver des conditions suffisantes dont un cas extrême serait de prendre $K = s$ et des matrices qui n'auraient aucune restriction. Cependant dans ce type de cas le nombre de paramètres à estimer sont introduits sans qu'ils soient forcément nécessaires pour lever les restrictions mises en évidence dans ce dernier exemple.

Parallèlement à ces problèmes se pose un problème d'identification que nous avons discuté pour le cas $K = 1$ seulement. Par exemple pour le cas $K > 1$

le fait d'interchanger les matrices A_{11} et A_{12} nous donne deux expressions différentes d'un même modèle. C'est pourquoi on doit imposer certaines restrictions aux matrices A_{1k} et B_{1k} . Dans la proposition suivante Engle et Kroner proposent une restriction particulièrement pratique car ce modèle est identifiable mais aussi général :

Proposition 3.4 *Supposons que les éléments diagonaux de C soient positifs. Considérons la classe des modèles BEKK dans lesquels les matrices A_{1k_r} sont obtenues en annulant les $r - 1$ premières colonnes et les $k_r - n(r - 1) - 1$ premières lignes, où $k_r = n(r - 1) + 1, \dots, nr$ et $r = 1, \dots, n$. Si on suppose aussi que $a_{nn, k_r} > 0; \forall k_r$ et que des restrictions similaires sont imposées sur les matrices B_{1k_r} , alors un modèle BEKK général sans autre représentation équivalente est obtenu dans cette classe.*

Remarque 3.3 *1-Dans les modèles définis par la proposition précédente, on a : $K = n^2$.*

2-Cette classe de modèles vérifie les conditions nécessaires de la proposition (4.4) car la première matrice n'a aucun paramètre s'annulant et le nombre de paramètres à calculer est $(n(n + 1)/2)^2$.

3-Les conditions de positivité des éléments diagonaux de la matrice C et des éléments a_{nn, k_r} des matrices A_{k_r} ont été imposées pour assurer l'identifiabilité du modèle. Le raisonnement nous donnant l'identification de cette classe de modèles est similaire au raisonnement de la proposition (4.3), cependant la deuxième condition d'identification porte sur l'élément a_{nn, k_r} car cet élément est différent de zéro pour toutes les matrices A_{k_r} .

4-Cette classe est générale car on remarque que à chaque terme correspond

un coefficient.

Exemple 3.3 Cas $n = 2$: Calculons les indices des matrices A_{1k_r} : les valeurs possibles de k_r sont $k_r = 2(r - 1) + 1$, $2(r - 1) + 2$, et $r = 1, 2$.

	$r=1$	$r=2$
$k_r = 2(r - 1) + 1$	1	3
$k_r = 2r$	2	4

On obtient les matrices suivantes dans le cas ARCH(1) :

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11,1} & a_{12,1} \\ a_{21,1} & a_{22,1} \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21,2} & a_{22,2} \end{pmatrix},$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12,3} \\ 0 & a_{22,3} \end{pmatrix}, A_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22,4} \end{pmatrix}.$$

On remarque effectivement que cet exemple satisfait les conditions nécessaires de généralité du modèle BEKK. De plus si on écrit l'expression les éléments de $vech(H_t)$ on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{11,t} = c_{11} + \underline{a_{11,1}^2} \epsilon_{1,t-1}^2 + 2a_{11,1} \underline{a_{21,1}} \epsilon_{1,t-1} \epsilon_{2,t-1} + (a_{21,1}^2 + \underline{a_{21,2}^2}) \epsilon_{2,t-1}^2 \\ h_{21,t} = c_{21} + a_{11,1} \underline{a_{12,1}} \epsilon_{1,t-1}^2 + (a_{21,1} a_{12,1} + a_{11,1} \underline{a_{22,1}}) \epsilon_{1,t-1} \epsilon_{2,t-1} + \\ \quad (a_{21,1} a_{22,1} + a_{21,2} \underline{a_{22,2}}) \epsilon_{2,t-1}^2 \\ h_{22,t} = c_{22} + (a_{12,1}^2 + \underline{a_{12,3}^2}) \epsilon_{1,t-1}^2 + (a_{12,1} a_{22,1} + a_{12,3} \underline{a_{22,3}}) \epsilon_{1,t-1} \epsilon_{2,t-1} + \\ \quad (a_{22,1}^2 + a_{22,2}^2 + \underline{a_{22,4}^2}) \epsilon_{2,t-1}^2 \end{array} \right.$$

On remarque que chaque terme a un paramètre libre (on peut considérer les paramètres soulignés par exemple). En ce sens, ce modèle est général.

Cependant on peut remarquer que pour certains termes correspondent une somme de carrés de paramètres induisant des restrictions : par exemple le coefficient du terme $\epsilon_{2,t-1}^2$ sera supérieur à $a_{21,1}^2$ ce paramètre étant déjà fixé par le terme $\epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1}$. Ainsi la classe définie dans la proposition (4.5) n'est pas générale si on considère les modèles qui ne sont pas inclus dans cette classe. En fait, ce problème vient du fait que le modèle BEKK n'est pas linéaire

3.3 Comparaison entre le modèle BEKK et le modèle vectoriel

En écrivant l'expression du modèle BEKK pour GARCH(1,1) et en utilisant la relation $vec(ABC) = (C' \otimes A)vec(B)$ on a :

$$h_t = (C \otimes C)'vec(I_n) + \sum_{k=1}^K (A_{1k} \otimes A_{1k})'vec(\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-1}') + \sum_{k=1}^K (B_{1k} \otimes B_{1k})'vec(H_{t-1}).$$

Si on prend $A_1 = \sum_{k=1}^K (A_{1k} \otimes A_{1k})'$ et $B_1 = \sum_{k=1}^K (B_{1k} \otimes B_{1k})$ on obtient l'expression du modèle vectoriel. Ce qui nous amène à formuler la proposition suivante :

Proposition 3.5 *Un modèle vectoriel appartient à la classe des modèles BEKK si et seulement si il existe C, A_{ik} et B_{ik} tels que :*

$$C_0 = (C \otimes C)'vec(I_n),$$

$$A_i = \sum_{k=1}^K (A_{ik} \otimes A_{ik})',$$

$$B_j = \sum_{k=1}^K (B_{jk} \otimes B_{jk})'.$$

Remarque 3.4 1-Un modèle vectoriel obtenu à partir d'un modèle BEKK est unique d'après la proposition précédente. Cependant l'inverse n'est pas vraie car $(A_{1k} \otimes A_{1k}) = ((-A_{1k}) \otimes (-A_{1k}))$ ou encore en changeant les indices k on obtient le même modèle vectoriel. Donc le choix des matrices A_{ik} n'est pas unique.

2-D'après les équations de la proposition précédente, il est clair qu'un modèle diagonal vectoriel peut être obtenu à partir d'un modèle BEKK si et seulement si les matrices A_{ik} et B_{jk} sont diagonales.

3-Les représentations BEKK étant restreintes de manière à ce que H_t soit définie positive, on voit que toutes les représentations vectorielles dont la matrice de covariance conditionnelle H_t n'est pas définie positive pour tout t n'admettent pas de représentation BEKK.

Ainsi, un modèle BEKK peut admettre une écriture linéaire s'il satisfait les conditions de la proposition (3.5). Cependant, il est important de noter qu'un modèle BEKK équivalent à un modèle vectoriel garde toujours les mêmes contraintes.

Proposition 3.6 Dans le modèle vectoriel, si on suppose que $C_0 = \text{vec}(\Omega)$ avec Ω matrice définie positive, si les matrices A_i et B_i sont diagonales. Alors, il existe une matrice triangulaire C et des matrices diagonales A_{ik} et B_{ik} , $k = 1, \dots, K$ telles que :

$$C_0 = \text{vec}(C'C),$$

$$A_i = \sum_{k=1}^n (A_{ik} \otimes A_{ik})',$$

$$B_i = \sum_{k=1}^n (B_{ik} \otimes B_{ik})'$$

La proposition précédente montre que le modèle BEKK inclut comme cas particuliers tout les modèles linéaires diagonaux définis positifs. De plus, on peut restreindre les $(n - k)$ premiers éléments des matrices A_{ik} et B_{ik} a être nuls. D'après la proposition (3.5), ce modèle est général sans autre représentation équivalente dans cette classe.

D'une manière générale, on voit qu'on ne peut considérer le modèle vectoriel uniquement quand cette représentation est équivalente au modèle BEKK qui garantit la définie positivité de H_t .

3.4 Etude de la stationnarité

Nous allons étudier la stationnarité au second ordre des modèles vectoriels et BEKK. Soit L l'opérateur retard défini comme suit $L^k \omega_t \equiv \omega_{t-k}$, on considère le processus MGARCH suivant :

$$h_t = C + A(L)e_t + B(L)h_t \quad (3.4)$$

on obtient le processus écrit sous le modèle vectoriel en prenant :

$$A(L) = A_1 L + \dots + A_q L^q$$

$$B(L) = B_1 L + \dots + B_p L^p$$

où les matrices $A_1, \dots, A_q, B_1, \dots, B_p$ sont de dimension $n \times n$.

En utilisant la relation $\text{vec}(ABC) = (C' \otimes A)\text{vec}(B)$, on obtient le modèle BEKK auquel on a appliqué l'opérateur $\text{vec}(\cdot)$ en prenant :

$$A(L) = \sum_{k=1}^q A_{1k} \otimes A_{1k} L + \dots + \sum_{k=1}^q A_{qk} \otimes A_{qk} L^q$$

$$B(L) = \sum k = 1^K (B_{1k} \otimes B_{1k})L + \dots + \sum k = 1^K (B_{pk} \otimes B_{pk})L^p$$

où les matrices $A_{1k}, \dots, A_{qk}, B_{1k}, \dots, B_{pk}$ sont de dimension $n \times n$.

Développons l'équation (3.4) :

$$\begin{aligned} h_t &= C + A(L)e_t + B(L)h_t \\ &= C + A(L)e_t + \sum_{j=1}^p B_j h_{t-j} \\ &= C + A(L)e_t + \sum_{j=1}^p B_j (C + A(L)\epsilon_{t-j} + B(L)h_{t-j}) \\ &= C + A(L)e_t + \sum_{j=1}^p B_j C + A(L) \sum_{j=1}^p B_j \epsilon_{t-j} + B(L) \sum_{j=1}^p B_j h_{t-j} \\ &= C + A(L)e_t + B(L)(C + A(L)\epsilon_t) + B^2(L)h_t \end{aligned} \quad (3.5)$$

si on réitère $n - 1$ fois l'opération obtient :

$$h_t = \sum_{i=1}^n B^{i-1}(C + A(L)e_t) + B^n(L)h_t.$$

Ainsi, on remarque que la quantité $h_t = \sum_{i=1}^{\infty} B^{i-1}(C + A(L)e_t)$ est solution du processus GARCH. En effet :

$$\begin{aligned} h_t &= C + A(L)e_t + \sum_{i=2}^{\infty} B^{i-1}(L)(C + A(L)e_t) \\ &= C + A(L)e_t + B(L) \sum_{i=1}^{\infty} B^{i-1}(L)(C + A(L)e_t) \\ &= C + A(L)e_t + B(L)h_t. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Notons que la somme $h_t = \sum_{i=1}^{\infty} B^{i-1}(C + A(L)e_t)$ existe si le rayon spectral de B est inférieur à 1. Cette écriture va nous permettre d'exprimer la condition de stationnarité pour les modèles vectoriels et BEKK :

Proposition 3.7 *Soit $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ un processus, si l'équation (3.4) définit un processus GARCH, alors $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ est stationnaire au second ordre si et seulement si $|\rho(A(1) + B(1))| < 1$.*

$\rho(A)$ étant le rayon spectral de la matrice A

Démonstration

Nous allons considérer la stationnarité dans le cas GARCH(1,1) uniquement. L'extension à des modèles plus généraux suit le même raisonnement, mais demande des calculs trop amples pour être exposée ici. Exprimons l'espérance conditionnelle de e_t aux dates $t-1, t-2, \dots$:

$$E_{t-1}(e_t) = \sum_{i=1}^{\infty} B_1^{i-1}(C + A_1 e_{t-i}),$$

$$\begin{aligned} E_{t-2}(e_t) &= E_{t-2}E_{t-1}(e_t) \\ &= E_{t-2}\left(\sum_{i=1}^{\infty} B_1^{i-1}(C + A_1 e_{t-i})\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} B_1^{i-1}(C + A_1 E_{t-2}(e_{t-i})) \\ &= C + A_1 E_{t-2}(e_{t-1}) + \sum_{i=2}^{\infty} B_1^{i-1}(C + A_1 E_{t-2}(e_{t-i})) \\ &= C + A_1 + \sum_{i=1}^{\infty} B_1^{i-1}(C + A_1 e_{t-i-1}) \\ &\quad + B_1 \sum_{i=1}^{\infty} B_1^{i-1}(C + A_1 e_{t-i-1}) \\ &= C + (A_1 + B_1) \sum_{i=1}^{\infty} B_1^{i-1}(C + A_1 e_{t-i-1}). \end{aligned} \tag{3.7}$$

En réitérant l fois cette opération, on obtient :

$$E_{t-l}(e_t) = (I + (A_1 + B_1) + \dots + (A_1 + B_1)^{l-2})C \\ + (A_1 + B_1)^{l-1} \sum_{i=1}^{\infty} B_1^{i-1} (C + A_1 e_{t-l+1}).$$

Soit Z une matrice carrée, $Z^l \rightarrow 0$ quand $l \rightarrow \text{infy}$ si et seulement si $\rho(Z) < 1$ et $\rho(Z) < 1$ si et seulement si $(I + Z + \dots + \dots) \rightarrow (I - Z)^{-1}$. Ainsi, $E_{t-1}(e_t)$ converge vers $(I - A_1 - B_1)C$ quand $l \rightarrow \text{infy}$ si et seulement si les valeurs propres de A_1 et B_1 sont inférieures à 1.

Remarque 3.5 Pour le modèle diagonal, la condition de stationnarité au second ordre pour le modèle $GARCH(1,1)$: $a_{ii} + b_{ii} < 1 \quad \forall \quad i \in \{1, \dots, n\}$ dans le cas du modèle vectoriel, et $\sum_{k=1}^n (a_{ii,k} + b_{ii,k}) < 1$ dans le modèle $BEKK$.

4 Modèles GARCH-Cholesky

Ce modèle a été développé par Kawakatsu (2003). Il consiste à utiliser le fait que H_t soit définie positive et admet donc une factorisation de Cholesky :

$$H_t = L_t L_t' \quad (4.1)$$

où L_t est une matrice triangulaire inférieure de terme général $l_{ij,t}$.

Ainsi, dans ce modèle, on exprime $l_t = \text{vech}(L_t)$ comme étant fonction du passé :

$$l_t = c + \sum_{i=1}^p A_i l_{t-i} + \sum_{j=1}^q (B_j \epsilon_{t-j} + F_j | \epsilon_{t-j} |) \quad (4.2)$$

où c est un vecteur de dimension $(n(n+1)/2) \times 1$, A_i est une matrice de dimension $(n(n+1)/2) \times (n(n+1)/2)$ et B_j, F_j sont des matrices de dimension $(n(n+1)/2) \times n$. Ce modèle permet d'obtenir directement la définie positivité de H_t sans restriction sur les coefficients. En effet, il n'y a aucune condition de définie positivité sur la matrice L_t dans le modèle GARCH-Cholesky alors que la matrice L_t nous permet d'obtenir la matrice H_t à chaque instant t . De plus, contrairement au cas du modèle BEKK, l'écriture est linéaire dans les paramètres et ϵ_t est directement utilisé dans l'expression du modèle GARCH-Cholesky, ce qui apporte plus de facilité dans la manipulation de ce modèle.

Cependant, on peut noter une contrainte importante qui vient du fait qu'une décomposition de Cholesky d'une matrice définie positive n'est pas unique. D'après Dhrymes 1984, (Proposition 58, Remarque 34, pp68-69) on peut identifier L_t en imposant que les éléments sur la diagonale de la matrice L_t soient strictement positifs. Ainsi, dans l'équation (4.2), pour assurer l'identification de L_t , les éléments correspondants aux éléments diagonaux de L_t doivent être strictement positifs. Par exemple il suffit d'imposer que les lignes de A_i, F_j et les éléments de c correspondant aux éléments diagonaux de L_t doivent être strictement positifs, alors que ceux de B_j doivent être nuls. En fait, l'introduction de la matrice F_j est motivée uniquement par la condition de positivité des éléments diagonaux de L_t . Elle permet de ne pas éliminer les valeurs passées de ϵ_t de l'expression des éléments diagonaux de L_t .

Remarque 4.1 *L'opérateur vech a été utilisé ici pour obtenir une matrice triangulaire inférieure d'une manière aisée. On remarque en effet que les éléments $L_{i,j}, i < j$ qui sont nuls ont été ainsi éliminés de la représentation.*

Exemple 4.1 *Considérons le modèle GARCH(1,1) pour $n=2$:*

$$\begin{pmatrix} l_{11,t} \\ l_{21,t} \\ l_{22,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11,t-1} \\ l_{21,t-1} \\ l_{22,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{1,t-1} \\ \epsilon_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \\ f_{31} & f_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\epsilon_{1,t-1}| \\ |\epsilon_{2,t-1}| \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Les paramètres a_{1j}, a_{3j} , $j \in \{1, 2, 3\}$ et f_{11}, f_{12}, f_{31} et f_{32} doivent être positifs alors que $b_{11}, b_{12}, b_{31}, b_{32}$ sont nuls pour assurer l'identifiabilité du modèle. On peut cependant remarquer dans cet exemple un effet d'asymétrie pour la quantité $l_{21,t}$ uniquement, alors que l'effet d'asymétrie n'est pas présent pour les éléments $l_{11,t}$ et $l_{22,t}$.

D'une manière générale, le modèle GARCH-Cholesky admet un nombre de paramètres d'ordre $O(n^4)$ car la matrice A_i est une matrice carrée de dimension $(k(k+1)/2) \times (k(k+1)/2)$, ce qui n'est pas pratique pour des modèles où on a $n > 3$. De la même façon que dans le modèle vectoriel, on peut restreindre le modèle de telle manière que l'élément $l_{rc,t}$ de L_t ne dépende que de ses valeurs passées et des valeurs passées de $\epsilon_{r,t}$ et $\epsilon_{c,t}$. On en déduit l'expression de $l_{rc,t}$:

$$\begin{aligned} l_{rc,t} &= c_{rr}^2 + \sum_{i=1}^p a_{rr}^2 l_{rr,t-i} + \sum_{j=1}^q f_{rr,j}^2 |\epsilon_{r,t-j}| \text{ si } r = c \\ &= c_{rc} + \sum_{i=1}^p a_{rc,i} l_{rc,t-i} + \sum_{j=1}^q (b_{rc,rj} \epsilon_{r,t-j} + b_{rc,cj} \epsilon_{c,t-j}) \end{aligned}$$

pour ($r > c$).

Remarque 4.2 1- Dans l'expression précédente, on note l'élément de la matrice A_i correspondant au terme $l_{rc,t-i}$ par $a_{rc,i}$ par souci de simplicité. En fait $a_{rc,i}$ ne correspond pas en général à l'élément se trouvant à la ligne r et colonne c de la matrice L_t .

2- Dans ce modèle A_i est diagonale et B_j, F_j ont au plus deux éléments différents de zéro dans chaque ligne.

3- Les éléments de $f_{rr,j}$ ont été introduits pour assurer la positivité des éléments diagonaux de la matrice L_t , on peut donc supposer ces éléments nuls dans l'expression de $l_{rc,t}$ quand $r > c$.

4- On remarque que dans le modèle GARCH-Cholesky le nombre de paramètres est d'ordre $O(n^4)$ car la matrice A_i est diagonale de dimension $(n(n+1)/2) \times (n(n+1)/2)$.

4.1 Asymétrie dans le modèle GARCH-Cholesky

Une conséquence de la linéarité du modèle GARCH-Cholesky restreint est que l'on peut exprimer facilement l'effet d'asymétrie. L'expression des éléments de L_t est la suivante :

$$\begin{aligned} l_{rc,t} &= c_{rr}^2 + \sum_{i=1}^p a_{rr}^2 l_{rr,t-i} + \sum_{j=1}^q (b_{rr,j}^2 \epsilon_{r,t-j}^- + f_{rr,j}^2 |\epsilon_{r,t-j}|) si \quad r = c \\ &= c_{rc} + \sum_{i=1}^p a_{rc,i}^2 l_{rc,t-i} + \\ &\quad \sum_{j=1}^q (b_{rc,rj} \epsilon_{r,t-j}^- + b_{rc,cj} \epsilon_{c,t-j}^- + f_{rc,rj} |\epsilon_{r,t-j}| + f_{rc,cj} |\epsilon_{r,t-j}|) \end{aligned}$$

si $r > c$, avec $\epsilon_t^- = \max(0, -\epsilon_t)$.

Une propriété des séries financières est que les valeurs négatives des innovations passées ont un plus grand effet sur la volatilité à la date t . Pour

l'élément $l_{rr,t}$ on retrouve cette propriété sans imposer aucune restriction particulière sur les paramètres c_{rr}^2 , a_{rr}^2 , $b_{rr,j}^2$ et $f_{rr,j}^2$. Ainsi, quand $\epsilon_t < 0$ on obtient des valeurs plus grandes pour $l_{rc,t}$. Cependant, dans le cas où $r > c$, les nouveaux paramètres introduisant l'asymétrie sont difficiles à interpréter car le signe de $l_{rc,t-i}$ est inconnu.

4.2 Etude des paramètres de $h_{ij,t}$ dans le cas GARCH(1,1) quand $n=2$

D'après la relation (4.1) on tire l'expression de $h_{ij,t}$ en fonction des éléments de L_t :

$$h_{ij,t} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{ik}l_{jk}. \quad (4.4)$$

Ainsi, si on ne prend pas en compte les effets de l'asymétrie, on a :

$$\begin{aligned} h_{11,t} = l_{11}^2 &= (c_{11}^4 + a_{11}^4 l_{11,t-1}^2 + f_{11}^4 \epsilon_{1,t-1}^2 + 2c_{11}^2 a_{11} l_{11,t-1} \\ &+ 2c_{11}^2 f_{11}^2 |\epsilon_{1,t-1}| + 2a_{11}^2 l_{11,t-1} f_{11}^2 |\epsilon_{1,t-1}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{21,t} = l_{21}l_{11} &= c_{11}^2 c_{21} + c_{11}^2 a_{21} l_{21,t-1} + a_{11}^2 l_{11,t-1} c_{21} + (c_{11}^2 b_{21,1} + \\ &a_{11}^2 l_{11,t-1} b_{21,1}) \epsilon_{1,t-1} + (c_{11}^2 b_{21,2} + a_{11}^2 l_{11,t-1} b_{21,2}) \epsilon_{2,t-1} + \\ &(f_{11}^2 c_{21} + f_{11}^2 a_{21} l_{21,t-1}) |\epsilon_{1,t-1}| + f_{11}^2 b_{21,2} |\epsilon_{1,t-1}| \epsilon_{2,t-1}. \end{aligned}$$

On remarque que les éléments de H_t dépendent de termes comme $\epsilon_{i,t-h}^2$, $\epsilon_{i,t-h}\epsilon_{j,t-h}$ mais aussi de $\epsilon_{i,t-1}$ et $|\epsilon_{i,t-h}|$, ce qui n'était pas le cas pour le modèle BEKK et le modèle vectoriel. Ainsi, dans le modèle GARCH-Cholesky restreint on a additionné de nouveaux termes dans la dynamique des éléments de la matrice de covariance du processus GARCH multivarié $h_{ij,t}$, alors que le nombre de paramètres reste du même ordre que dans le

cas du modèle BEKK. Cependant, l'interprétation de ces nouveaux termes reste difficile. De plus, les termes $h_{ij,t}$ ne dépendent pas directement de leurs valeurs passées sauf pour $j = 1$. Enfin, on remarque que pour obtenir un modèle GARCH-Cholesky dont le nombre de paramètres est du même ordre que dans le modèle BEKK, il faut faire des hypothèses très restrictives.

5 Modèles à corrélations conditionnelles constantes et extensions

Les modèles à corrélations conditionnelles constantes sont des modèles pour lesquels les variances des composantes du processus GARCH multivarié varient en fonction du temps et les corrélations conditionnelles sont quant à elles constantes. Cette hypothèse énoncée par Bollerslev(1990) est justifiée par l'étude empirique des processus multivariés. La corrélation conditionnelle entre ϵ_{it} et ϵ_{jt} à l'instant $t - 1$ est donnée par la relation suivante :

$$\rho_{ij,t} = h_{ij,t}/(h_{ii,t}h_{jj,t})^{1/2}.$$

En général cette corrélation varie au cours du temps, mais dans certains cas on peut la supposer constante : les covariances conditionnelles sont proportionnelles à la racine carrée du produit des variances :

$$h_{ij,t} = \rho_{ij}(h_{ii,t}h_{jj,t})^{1/2} \quad j = 1, \dots, n \quad \text{et} \quad i = j + 1, \dots, n. \quad (5.1)$$

Remarque 5.1 *La validité de l'hypothèse nous donnant l'équation précédente relève d'une étude empirique de certaines séries de processus MGARCH.*

Il est cependant important de souligner que les variances conditionnelles

varient au cours du temps dans ce modèle : $h_{ii,t}$ est une fonction du passé. Ainsi, on tire une décomposition de H_t :

$$H_t = \Delta_t \Gamma \Delta_t, \quad (5.2)$$

avec Δ_t une matrice diagonale de dimension $n \times n$ ayant pour éléments $\sqrt{h_{11,t}}, \dots, \sqrt{h_{nn,t}}$. La matrice R est constante par rapport au temps, de dimension $n \times n$ et qui a pour éléments ρ_{ij} et 1 sur la première diagonale. D'après l'équation (5.2), il est clair que H_t est définie positive dès que les variances conditionnelles sont bien définies et R définie positive car :

$$x' H_t x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \Leftrightarrow x' D_t R D_t x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0.$$

De plus on peut remarquer que D_t et $\Gamma^{1/2}$ commutent, en effet, on a :

$$H_t^{1/2} = \Delta_t \Gamma^{1/2} = \Gamma^{1/2} \Delta_t.$$

5.1 Vraisemblance

Un avantage de ce modèle est la simplicité du calcul du quasi-maximum de vraisemblance au moment de procéder à l'estimation des paramètres. Exprimons l'expression de la log vraisemblance dans le cas du modèle BEKK :

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \sum_{t=1}^T \log[1/(2\pi)^{n/2} \times 1/|H_t|^{-1/2} \times \exp(-1/2 \epsilon_t' H_t^{-1} \epsilon_t)] \\ &= \sum_{t=1}^T -n/2 \log(2\pi) - 1/2(\log(|H_t|) + \epsilon_t' H_t^{-1} \epsilon_t) \\ &= -Tn/2 \log(2\pi) - 1/2 \sum_{t=1}^T (\log(|H_t|) + \epsilon_t' H_t^{-1} \epsilon_t) \end{aligned}$$

où T est le nombre d'observations de la série.

Dans cette expression on doit inverser la matrice H_t de dimension $(n \times n)$ à chaque instant t ce qui demande beaucoup de calculs sachant que le nombre d'observations pour les séries financières est en général grand. Dans le modèle à corrélations constantes le fait que l'on puisse décomposer la matrice H_t nous permet de ne pas inverser H_t à chaque date t car $H_t^{-1} = \Delta_t^{-1}\Gamma^{-1}\Delta_t^{-1}$ on obtient une expression du quasi-maximum de vraisemblance qui est la suivante :

$$\begin{aligned} L(\theta) &= -Tn/2 \log(2\pi) - 1/2 \sum_{t=1}^T (\log(|\Delta_t R \Delta_t|) + \epsilon_t' \Delta_t^{-1} \Gamma^{-1} \Delta_t^{-1} \epsilon_t) \\ &= -Tn/2 \log(2\pi) - T/2 \log(|R|) - \sum_{t=1}^T (\log(|\Delta_t|) - 1/2 \sum_{t=1}^T \tilde{\epsilon}_t' \Gamma^{-1} \tilde{\epsilon}_t) \\ &\quad \text{où } \tilde{\epsilon}_t = \Delta_t^{-1} \epsilon_t. \end{aligned}$$

5.2 Modèles à corrélations constantes dynamiques

D'une manière générale faire l'hypothèse que les corrélations conditionnelles sont constantes peut être trop restrictive pour l'étude de certaines séries. Engle (2002) a introduit le modèle à corrélations conditionnelles dynamiques (Dynamic Constant Correlation). Dans ce modèle R varie au cours du temps, l'expression de H_t est la suivante :

$$H_t = D_t R_t D_t, \tag{5.3}$$

où la matrice D_t a les mêmes spécifications que dans le modèle à corrélation constante et la matrice R_t de dimension $n \times n$ a pour éléments $r_{ij,t} = \rho_{ij,t}$ quand $i \neq j$ et 1 quand $i = j$. Les éléments $r_{ij,t}$ sont fonctions du passé, Engle a donné deux spécifications GARCH de ces termes. Cependant aucune étude n'a encore été faite sur ces spécifications.

5.3 Extention

Jeantheau (1998) a proposé une extension du modèle à corrélation constante de Bollerslev qui admet la même décomposition de la matrice de covariance conditionnelle H_t définie en (5.2). Les covariances conditionnelles étant constantes dans ce modèle, ce sont uniquement les variances conditionnelles qui sont exprimées en fonction du passé. Soit une série $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^n qui suit un processus GARCH multivarié, on a :

$$\epsilon_t = \Delta_t \eta_t, \quad (5.4)$$

où Δ_t est une matrice diagonale et les éléments $\Delta_{t,ii}$ satisfont la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} \Delta_{t,11}^2 \\ \vdots \\ \Delta_{t,nn}^2 \end{pmatrix} = C + \sum_{i=1}^q A_i \begin{pmatrix} \epsilon_{t-i,1}^2 \\ \vdots \\ \epsilon_{t-i,n}^2 \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^p B_j \begin{pmatrix} \Delta_{t-i,11}^2 \\ \vdots \\ \Delta_{t-i,nn}^2 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

avec $C \in \mathbb{R}^n$, A_i et $B_j \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, nous supposons que les coefficients des matrices de la relation précédente sont tous positifs. De plus, η_t est une série de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées vérifiant les conditions suivantes :

1- L'espérance de η_t est nulle, et la matrice de covariance Γ est telle que :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{12} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \rho_{(n-1)n} \\ \rho_{1n} & \cdots & \rho_{(n-1)n} & 1 \end{pmatrix}.$$

2- La variable aléatoire η_t est indépendante de la tribu I_{t-1} engendrée par les valeurs passées du processus.

3- La loi de η_t est telle qu'il n'existe pas de forme quadratique q telle que $q(\eta_t) = \gamma$ p.s., avec $\gamma \in \mathbb{R}$. Enfin θ est le vecteur des paramètres.

De cette définition, on obtient l'expression des éléments $h_{ij,t}$ de la matrice de covariance conditionnelle du processus ϵ_t :

$$\begin{cases} h_{ij,t} = (\Delta_{t,ii})^2 \\ h_{ij,t} = \rho_{ij} \Delta_{t,ii} \Delta_{t,jj} \quad \text{pour } i \neq j. \end{cases}$$

En effet, si on exprime H_t en fonction des matrices Δ_t et Γ on a :

$$H_t = E_{t-1}(\epsilon_t \epsilon_t') = E_{t-1}(\Delta_t \eta_t \eta_t' \Delta_t') = \Delta_t \Gamma \Delta_t.$$

Ainsi, on vérifie bien que les corrélations conditionnelles sont constantes.

Remarque 5.2 1- Si on impose que les composantes de η_t sont indépendantes entre elles alors H_T est diagonale.

2- Si A_i et B_j sont diagonales, $h_{ii,t}$ ne dépend que de ses propres valeurs passées et des valeurs passées de ϵ_t , alors que dans ce cas $h_{ij,t}$ dépend des valeurs passées de $h_{ii,t}$, $h_{jj,t}$ et des valeurs passées de $\epsilon_{i,t}$ et $\epsilon_{j,t}$.

Nous allons maintenant spécifier les conditions à imposer sur les paramètres pour que le modèle soit stationnaire et identifiable.

5.4 Stationnarité

A partir des équations (5.4) et (5.5) on peut écrire le modèle à corrélation constante de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} h_{11,t} \\ \vdots \\ h_{nn,t} \end{pmatrix} = C + \sum_{i=1}^s (A_i(\eta_t^2) + B_i) \begin{pmatrix} h_{11,t-i} \\ \vdots \\ h_{nn,t-i} \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

où $s = \sup(p, q)$, $A_i(\eta_t^2) = 0$ pour $i > q$ et $B_j = 0$ pour $j > p$.

La proposition suivante nous donne la condition de stationnarité du modèle à corrélation constante :

Proposition 5.1 *Si le vecteur des paramètres θ est tel que $\det(I_n - \sum_{i=1}^s (A_i + B_i)\lambda)$ a ses racines en dehors du cercle unité alors le modèle $MGARCH(p, q)$ à corrélation constante admet une solution stationnaire au second ordre. De plus cette solution est unique et strictement stationnaire ergodique.*

En effet, exprimons le modèle sous forme matricielle :

Soit

$$V_t = \begin{pmatrix} H_{11,t} & \cdots & H_{nn,t} & H_{11,t-1} & \cdots & H_{dd,t-n+1} \end{pmatrix}. \quad \text{On a :}$$

$$V_t = \begin{pmatrix} A_1(\eta_{t-1}^2) + B_1 & A_2(\eta_{t-2}^2) + B_2 & \cdots & A_n(\eta_{t-n}^2) + B_n \\ I_n & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & I_n & 0 \end{pmatrix} V_{t-1} + \begin{pmatrix} C \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient :

$$V_t = F(\zeta_t)V_{t-1} + G$$

avec $\zeta'_t = (\eta_{t-1}, \eta_{t-2}, \dots, \eta_{t-s})$ et, $G' = (C, 0, \dots, 0)$ et $F(\zeta_t)$ la matrice de la relation précédente. On en déduit que :

$$V_t = F(\zeta_t) \cdots F(\zeta_{t-k+1})V_{t-1} + \sum_{i=0}^{k-1} F(\zeta_t) \cdots F(\zeta_{t-i+1})G$$

On remarque que le second terme de l'égalité précédente est une série de termes positifs, de plus on a :

$$E(F(\zeta_t) \cdots F(\zeta_{t-i+1})) = F^i G,$$

$$\text{avec } F = \begin{pmatrix} A_1(\eta_{t-1}^2) + B_1 & A_2(\eta_{t-2}^2) + B_2 & \cdots & A_n(\eta_{t-n}^2) + B_n \\ I_n & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $\det(\lambda Id - F)$ et $\det(I_n - \sum_{i=1}^s (A_i + B_i)\lambda^{-i})$ ont les mêmes racines. Ainsi, la série converge dans L^1 si $\det(I_n - \sum_{i=1}^s (A_i + B_i)\lambda)$ a ses racines en dehors du cercle unité.

$$\text{Soit } \bar{V}_{t,\theta} = \sum_{i=1}^{\infty} F(\zeta_t) \cdots F(\zeta_{t-i+1})G,$$

comme les variables aléatoires η_t sont indépendantes, alors le processus (ζ_t) , et par conséquent le processus $(\bar{V}_{t,\theta})$ sont strictement stationnaires ergodiques. On en déduit que $\bar{\epsilon}_{t,i} = \sqrt{\bar{h}_{ii,t}}\eta_{t,i}$ est un processus GARCH(p,q) strictement stationnaire et converge dans L^2 .

De plus cette solution est unique car si l'on suppose que ϵ_t est une autre solution, alors V_t satisfait :

$$V_t = F(\zeta_t) \cdots F(\zeta_{t-k+1})V_{t-k} + \sum_{i=0}^{k-1} F(\zeta_t) \cdots F(\zeta_{t-i+1})G.$$

Or, on a :

$$F(\zeta_t) \cdots F(\zeta_{t-k+1})V_{t-k} = F^k E(V_{t-k}) = cF^k \longrightarrow 0$$

avec $c > 0$. Ainsi, $\bar{V}_t = V_t$ et donc $\bar{\epsilon}_t = \epsilon_t$.

5.5 identifiabilité

En utilisant l'opérateur retard L , on peut exprimer le modèle à corrélation constante de la manière suivante :

$$P(L) \begin{pmatrix} h_{11,t} \\ \vdots \\ h_{nn,t} \end{pmatrix} = C + Q(L) \begin{pmatrix} \epsilon_{11}^2 \\ \vdots \\ \epsilon_{t,n}^2 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

avec P et Q deux matrices de dimension $n \times n$ à coefficients polynomiaux. On remarque que si on multiplie (5.7) par une matrice à coefficients polynomiaux $R(L) \neq I_n$, on obtient une autre formulation du modèle à corrélation constante avec la même solution. Il est donc nécessaire de vérifier certaines conditions pour assurer l'identifiabilité du modèle. Avant d'aborder cette question, nous allons d'abord rappeler quelques résultats sur les matrices à coefficients polynomiaux.

Propriétés des matrices à coefficients polynomiaux

Les propriétés et les résultats de cette section ont été établies par Kalath(1980). Notons MP l'ensemble des matrices à coefficients polynomiaux.

Définition 5.1 Soit $M(L) \in MP$ une matrice carrée. La matrice $M(L)$ est unimodulaire si son déterminant est non nul et indépendant de L .

Le théorème suivant nous donne la définition du plus grand diviseur commun à gauche (ou PGCD à gauche) d'une matrice carrée.

Théorème 5.1 Soit $A, B \in MP$ tels que $\det A \neq 0$ et $\det B \neq 0$; il existe $D \in MP$ tel que :

Chaque diviseur à gauche de D est aussi un diviseur à gauche de A et B , et chaque diviseur à gauche de A et B est aussi un diviseur à gauche de D .

On appelle la matrice D le PGCD à gauche de A et de B . De plus on a l'égalité de Bezout :

$$\exists(U, V) \in MP^2/D = AU + BV.$$

Il est important de remarquer que le PGCD à gauche n'est pas unique, mais si J est un autre PGCD à gauche de A et B , alors il existe une matrice W unimodulaire telle que $J = DW$. Ainsi, deux matrices sont premières si aucun de ses PGCD à gauche est unimodulaire.

Dans le cas univarié il suffit de supposer que les deux polynômes sont premiers pour obtenir l'identifiabilité. Mais comme le PGCD à gauche n'est pas unique pour une matrice à coefficients polynomiaux, cette hypothèse n'est pas suffisante pour assurer l'identifiabilité. Par conséquent, nous devons introduire la notion de matrice réduite par colonnes. Soit $M(L)$ une matrice à coefficients polynomiaux et d_{ij} le degré du polynôme $M_{ij} = \sum_{l=0}^{d_{ij}} a_{ij,l}L^l$. On définit $d_j(M)$ et la matrice M^{rc} par :

$$d_j(M) = \sup_i d_{ij} \quad \text{et} \quad M_{ij}^{rc} = a_{ij,d_j}.$$

On peut interpréter $d_j(M)$ comme étant le retard maximum d'un terme apparaissant dans l'expression d'une des variances.

Définition 5.2 Une matrice à coefficients polynomiaux M est réduite par colonnes si le déterminant de M^{rc} n'est pas égal à 0.

5.6 Notion de formulation GARCH minimale

Proposition 5.2 Soit (P_1, Q_1) un couple de matrices à coefficients polynomiaux tel que le modèle défini en (5.5) a une solution strictement stationnaire, $\det P_1$ et $\det Q_1 \neq 0$, et P_1 et Q_1 sont premières. Alors, si ϵ_t est aussi la solution du modèle écrit avec le couple (P_2, Q_2) , il existe une matrice $M \in MP$ telle que $P_2 = MP_1$ et $Q_2 = MQ_1$.

Ainsi, comme indiqué dans la section précédente la condition P_1 et Q_1 sont premières n'est pas suffisante pour identifier le modèle. Une façon de choisir un couple de matrices (P_1, Q_1) serait de prendre le couple de matrices induisant le moins de retard des termes $\Delta_{t,ii}(\theta)$ et $\epsilon_{t,i}$. Cependant, il est possible de trouver une matrice unimodulaire M telle que $M \neq Id$, $d_j(MP) = d_j(P)$, $d_j(MQ) = d_j(Q)$, $M(0) = Id$ et (MP, MQ) solution du modèle défini en (5.5). La définition suivante nous donne la condition qui va nous permettre d'assurer l'identification du modèle :

Définition 5.3 Une formulation d'un modèle $GARCH(P, Q)$ multivarié est minimale si :

$$P(L) \begin{pmatrix} h_{11,t} \\ \vdots \\ h_{nn,t} \end{pmatrix} = C + Q(L) \begin{pmatrix} \epsilon_{t,1}^2 \\ \vdots \\ \epsilon_{t,n}^2 \end{pmatrix}$$

où P et Q sont des matrices à coefficients polynomiaux satisfaisant les conditions suivantes :

$$1-P(0) = Id \text{ et } Q(0) = 0.$$

2- $\det(P) \neq 0$ et $\det(Q) \neq 0$.

3- P et Q sont premières.

4- $\forall j, 1 \leq j \leq n, d_j(P) = d_j \leq p$ et $d_j(Q) = d_j \leq q$.

5- P ou Q sont réduits par colonnes.

La proposition suivante justifie l'introduction de la notion de formulation minimale pour un modèle GARCH(p,q).

Proposition 5.3 *Soit (P_1, Q_1) une formulation minimale d'un modèle GARCH(p,q) multivarié telle qu'il existe une solution au second ordre notée ϵ_t . Alors, ϵ_t est aussi une solution d'un autre modèle formulé avec le couple (P_2, Q_2) il existe j , tel que $d_j(P_2) > d_j(P_1)$ ou $d_j(Q_2) > d_j(Q_1)$.*

Démonstration

D'après la proposition (5.2) on a : $P_2 = MP_1$ et $Q_2 = MQ_1$. Si P_1 est réduite par colonnes, comme $(P_2)(0) = (MP_1)(0) = Id$, on a : $M(0) = Id$ et M doit être égal à $Id + LR(L)$, où $R(L)$ est une matrice à coefficients polynomiaux. Ainsi, $MP_1 = P_1 + LR(L)P_1$. Donc $d_j(MP_1) = d_j(P_1)$, $j \in \{1, \dots, n\}$ seulement si $RP_1^{rc} = 0$. Comme P_1 est réduite par colonnes, alors $R(L) = 0$. On peut effectuer le même raisonnement en supposant que Q_1 est réduite par colonnes.

Remarque 5.3 *La condition imposant que P ou Q soit réduite par colonnes est essentielle dans la proposition (5.3). Elle permet d'éliminer le cas où on a M une matrice unimodulaire telle que $d_j(MP) = d_j(P_1)$ et $d_j(MQ) = d_j(Q_1)$. En effet cette condition astreint la matrice M à être égale à la matrice identité.*

Le lemme suivant va nous permettre d'énoncer les conditions nous assurant l'identifiabilité du modèle :

Lemme 5.1 *Si U est une matrice $n \times n$ et V est un vecteur I_{t-1} -mesurable,*

on a :

$$U \begin{pmatrix} \epsilon_{1,t}^2 \\ \vdots \\ \epsilon_{n,t}^2 \end{pmatrix} = V \Rightarrow U = 0 \quad \text{et} \quad V = 0.$$

Proposition 5.4 *Si on suppose H_t la solution au second ordre du modèle MGARCH à corrélation constante, et si les matrices C_{0i} , A_{0i} et B_{0j} correspondent à la formulation minimale du modèle MGARCH à corrélation constante alors on a :*

$$H_t = H_{0t} \forall t \quad \text{p.s.} \quad \Rightarrow \quad C_{0i} = C_i, A_{0i} = A_i, B_{0j} = B_i \quad \text{et} \quad \rho_{0ij} = \rho_{ij}.$$

H_{0t} étant la matrice de covariance conditionnelle obtenue avec la formulation minimale.

Remarque 5.4 *La notion de formulation minimale est essentielle pour l'identifiabilité du modèle. Cependant cette notion suppose que P ou Q doivent être réduits par colonnes, ce qui est une restriction supplémentaire pour le modèle.*

On peut remarquer d'abord que $H_{0t} = H_t$ implique que $\rho_{0ij} = \rho_{ij}$. D'après l'équation (5.5) on a :

$$\begin{pmatrix} h_{11,t}^2 \\ \vdots \\ h_{nn,t}^2 \end{pmatrix} = C + \sum_{i=1}^q A_i \begin{pmatrix} \epsilon_{t-i,1}^2 \\ \vdots \\ \epsilon_{t-i,n}^2 \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^p B_j \begin{pmatrix} h_{11,t-i}^2 \\ \vdots \\ h_{nn,t-i}^2 \end{pmatrix}.$$

De plus on a quand on exprime le modèle avec la formulation minimale on a :

$$\begin{pmatrix} h_{11,0t}^2 \\ \vdots \\ h_{nn,0t}(\theta_0)^2 \end{pmatrix} = C_0 + \sum_{i=1}^q A_{0i} \begin{pmatrix} \epsilon_{t-i,1}^2 \\ \vdots \\ \epsilon_{t-i,n}^2 \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^p B_{0j} \begin{pmatrix} h_{11,0t-i}^2 \\ \vdots \\ h_{nn,0t-i}^2 \end{pmatrix}.$$

Si $H_t = H_{0t}$ on obtient :

$$V + \sum_{i=1}^q M_i \begin{pmatrix} \epsilon_{t-i,1}^2 \\ \vdots \\ \epsilon_{t-i,n}^2 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^p M_{q+i} \begin{pmatrix} h_{11,t-i}^2 \\ \vdots \\ h_{nn,t-i}^2 \end{pmatrix} = 0. \quad (5.8)$$

où V est un vecteur constant de dimension n et M_i sont des matrices de dimension $n \times n$. Nous devons montrer que tout ces termes sont nuls. On tire de l'équation (5.8) la relation suivante :

$$M_1 \begin{pmatrix} \epsilon_{t-1,1}^2 \\ \vdots \\ \epsilon_{t-1,n}^2 \end{pmatrix} = U,$$

avec U vecteur I_{t-2} -mesurable. D'après le lemme (5.1) M_1 et U sont nuls.

On en déduit que :

$$M_{q+1} \begin{pmatrix} h_{11,t-1}^2 \\ \vdots \\ h_{nn,t-1}^2 \end{pmatrix} = -V - \sum_{i=2}^q M_i \begin{pmatrix} \epsilon_{t-i,1}^2 \\ \vdots \\ \epsilon_{t-i,n}^2 \end{pmatrix} - \sum_{i=2}^p M_{q+i} \begin{pmatrix} h_{11,t-i}^2 \\ \vdots \\ h_{nn,t-i}^2 \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Supposons que P est réduite par colonnes ; d'après la proposition (5.3), le terme de gauche de l'équation (5.9) doit avoir une formulation avec au moins une colonne j avec $d_j(P)$ retards, ce qui est en contradiction avec le terme de droite de l'équation qui a seulement $d_j(P) - 1$ retards. Donc, $M_{q+1} = 0$.

En réitérant le meme raisonnement on montre que $M_2, M_{q+2}, M_3, \dots, M_{q+p}$ sont nuls et donc que $V = 0$.

6 Conclusion

Dans cette étude nous avons pu aborder différents problèmes induits par le passage du cas univarié au cas multivarié. Ainsi, nous avons vu que des restrictions doivent être imposées sur les fonctions exprimant H_t en fonction de son passé pour assurer la définie positivité de la matrice de covariance conditionnelle à chaque instant t . D'autre part, nous avons vu qu'il est parfois nécessaire d'imposer de nouvelles restrictions pour réduire le nombre de paramètres à estimer : en effet le nombre des paramètres croit quadratiquement dans les modèles présentés. Cependant, l'intérêt pour les modèles GARCH multivariés étant récent, l'étude de ces modèles reste incomplète.

7 Références

- BOLLERSLEV, T.P. (1986) Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 31, 309-28.
- BOLLERSLEV, T.P. (1990) Modeling the coherence in short-run nominal exchange rates : a multivariate generalized ARCH model. *Review of economics and statistics* 72, 498-505.

- DHRYMES, P.J. (1984) *Mathematics for econometrics*, 2nd ed. New York ; Springer Verlag.
- ENGLE, R.F. (1982) Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation. *Econometrica* 50, 987-1008.
- ENGLE, R.F. ET KRONER, K.F. (1995) Multivariate simultaneous generalized ARCH. *Econometric theory* 11, 122-50.
- ENGLE, R.F. (2002) Dynamic conditional correlation : A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. *Journal of Business and economic statistics* 20, 339-50.
- JEANTHEAU, T. (1998) Strong consistency of estimators for multivariate ARCH models ; *Econometric theory* 14, 70-86.
- KAWAKATSU, H. (2003) Cholesky factor GARCH. Rapport de recherche, Queen's University, Belfast. Non publié.
- KAILATH, T. (1980) *Linear systems*. Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice Hall.