# Plans d'expériences

## Séance 3: Plans factoriels fractionnaires

# Définition

## Plans factoriels fractionnaires

Un plan factoriel fractionnaire est un sous-ensemble des objets d'un plan factoriel complet.

L'utilisation de plans factoriels fractionnaires se justifie par le grand nombre d'unités de certains plans factoriels complets.

$\Rightarrow$ Un plan de $2^6$ comporte 64 unités, un plan $3^6$ comporte 729 unités. Le nombre d'unités d'un plan $b^n$ croît exponentiellement avec le nombre $n$ de facteurs.

$\Rightarrow$ grand nombre de quantités à estimer (effets principaux, interactions...).

$\Rightarrow$ Certaines expériementations peuvent être très coûteuses. Par exemple on peut penser que des plans fractionnaires on été utilisées dans les stations spatiales...

- On se concentre sur les plans de type $2^n$ dans la suite.

# Fractions régulières

Une fraction régulière est un plan où le nombre d'unités est $2^{n-h}$.

- La fraction $\frac{1}{2}$ d'un plan $2^n$ comporte $2^{n-1}$ unités.
- La fraction $\frac{1}{4}$ d'un plan $2^n$ comporte $2^{n-2}$ unités...

$\Rightarrow$ Une telle construction de plans fractionnaires a de nombreuses propriétés intéressantes.

$\Rightarrow$ Plus particulièrement ils permettent une modélisation claire et relativement aisée des effets.

# Fractions régulières

Les fractions régulières sont souvent générées par "la méthode de la matrice clé". Les unités expérimentales sont repérées par :

- Les niveaux des facteurs de base.
- Les niveaux des facteurs définis (les autres facteurs) qui sont obtenus par des relations algébriques simples à partir des niveaux des facteurs de base.

# Construction d'une fraction $\frac{1}{2}$ du plan $2^3$.

- Deux facteurs de base : $A$ et $B$.
- Un facteur défini : $C$.

Les niveaux de $C$ sont donnés par la relation $C = AB$. On obtient la fraction $\frac{1}{2}$ suivante :

| $A$ | $B$ | $C$ |
|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $1$ |
| $1$ | $-1$ | $-1$ |
| $-1$ | $1$ | $-1$ |
| $-1$ | $-1$ | $1$ |

$\Rightarrow$ On observe uniquement les réponses des objets dans le tableau.

# Confusion des effets

Dans le modèle complet on a :

$$\begin{pmatrix} \tau(1,1,1) \\ \tau(1,1,-1) \\ \tau(1,-1,1) \\ \tau(1,-1,-1) \\ \tau(-1,1,1) \\ \tau(-1,1,-1) \\ \tau(-1,-1,1) \\ \tau(-1,-1,-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e(1) \\ e(A) \\ e(B) \\ e(C) \\ e(AB) \\ e(AC) \\ e(BC) \\ e(ABC) \end{pmatrix}$$

# Confusion des effets

Si l'on considère uniquement les réponses des objets de la fraction $\frac{1}{2}$, on a :

$$\begin{pmatrix} \tau(1,1,1) \\ \tau(1,-1,-1) \\ \tau(-1,1,-1) \\ \tau(-1,-1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e(1) \\ e(A) \\ e(B) \\ e(C) \\ e(AB) \\ e(AC) \\ e(BC) \\ e(ABC) \end{pmatrix}$$

Les $e(.)$ sont les effets et les $\tau(.,.,.)$ sont les réponses théoriques.

Le modèle précédent peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} \tau(1,1,1) \\ \tau(1,-1,-1) \\ \tau(-1,1,-1) \\ \tau(-1,-1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e(1)+e(ABC) \\ e(A)+e(BC) \\ e(B)+e(AC) \\ e(C)+e(AB) \end{pmatrix}$$

On écrit ce modèle de façon compacte :

$$\tilde{\tau} = X\tilde{e}.$$

On remarque que : $ABC = 1$, $A = BC$, $B = AC$ et $C = AB$.

$\Rightarrow$ On déduit les effets qui sont confondu en écrivant les diverses relations existant entre les facteurs.

⇒ Confusion des effets : On ne peut estimer que les quantités $e(1) + e(ABC)$, $e(A) + e(BC)$, $e(B) + e(AC)$ et $e(C) + e(AB)$.

⇒ On suppose dans certains cas que les interactions sont d'un ordre de grandeur plus petit que les effets principaux et la moyenne.

- Les fonctions estimables de base s'estiment de la même manière que pour les plans complets.

- On veut construire la fraction $\frac{1}{4}$ d'un plan $2^6$.
- $A$, $B$, $C$ , $D$ sont les facteurs de base.
- $E$ et $F$ sont les facteurs définis.

⇒ On prend : $E = ABC$ et $F = -BCD$. Ce sont les relations génératrices du plan.

⇒ On en déduit que $1 = ABCE = -BCDF = -ADEF$. Ce sont les relations de définition de la fraction.

⇒ On obtient les f.e.b. en effectuant tout les produits possibles sur les relations de définitions. Par exemple :

$$A = BCE = -ABCDF = -DEF$$

implique que

$$e(A) + e(BCE) - e(BCDF) - e(ADEF)$$

est une f.e.b.

- Dans cet exemple si on suppose que les interactions de trois facteurs ou plus sont négligeables, la f.e.b. correspond à l'effet du facteur $A$.